

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАГНЕТИЗМА

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

**«УЧЕТ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ МЕТААТОМОВ
ПРИ РАСЧЕТЕ ЛОКАЛЬНОЙ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ
МЕТАПОВЕРХНОСТИ»**

Выполнил студент
219М группы:
Сацкий А.В.

Научный руководитель:
доцент Радковская А.А.

Допущен к защите 28.05.2019
Зав. кафедрой магнетизма
профессор Перов Н.С. _____

Москва
2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1. МЕТОДЫ РАСЧЁТА МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ МЕТАМАТЕРИАЛОВ	5
1.1 Магнитная проницаемость метаматериалов	5
1.1.1. Эффективная проницаемость аддитивного метаматериала	5
1.1.2. Эффективная проницаемость бесконечного метаматериала с учетом взаимодействия метаатомов	8
1.1.3. Эффективная проницаемость метаматериала конечных размеров	10
1.2. Локальная магнитная проницаемость метаповерхностей	13
ГЛАВА 2. МОДЕЛИ И МЕТОДЫ РАСЧЁТА	21
2.1. Модели	21
2.1.1. Параметры моделируемых метаатомов	21
2.1.2. Кольцо из бесконечно тонкого провода	22
2.1.3. Цилиндрическое бесконечно тонкое кольцо конечной высоты	23
2.1.4. Двойное цилиндрическое кольцо конечной высоты	24
2.1.5. Резонатор реальной геометрии	25
2.2. Методы расчёта	26
2.2.1. Метод численного интегрирования в CST	26
2.2.2. Особенности расчёта моделей в CST	30
2.2.3. Расчёт магнитного поля метаатома заданной конфигурации в пакете MATLAB	35
ГЛАВА 3. РЕЗУЛЬТАТЫ	39
3.1. Поле в центре метаатома в различных моделях в зависимости от расстояния	39
3.2. Пространственное распределение магнитного поля в центральной плоскости и над поверхностью метаатома	42
3.3. Учёт размеров измеряющей антенны	43
3.4. Сравнение результатов численного моделирования локальной проницаемости и результатов эксперимента	45
ВЫВОДЫ	51
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	53
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	54

ВВЕДЕНИЕ

Метаматериалы — современные композиционные материалы, свойства которых обусловлены не только свойствами составляющих их элементов, но и в не меньшей степени искусственно созданной периодической структурой [1]. Метаматериалы представляют собой искусственно сформированные и особым образом структурированные среды, обладающие уникальными электромагнитными, механическими, оптическими или акустическими свойствами, сложно достижимыми технологически, либо не встречающимися в природе.

Метаматериалы были впервые теоретически описаны во второй половине прошлого века В.Г.Веселаго [2]. Его теория нашла экспериментальное подтверждение только в 2000 году [3], и с тех пор появилось огромное количество новых идей по развитию и практическому применению метаматериалов. На их основе было предложено создать суперлинзы, позволяющие преодолеть дифракционный предел и имеющие потенциал в области медицинской томографии [4], датчики влажности земли [5], антенны, обладающие сверх-направленностью [6,7] и даже методы беспроводной передачи энергии [8].

Структурной единицей магнитного метаматериала - метаатомом - зачастую служит расщеплённый кольцевой резонатор, реагирующий на магнитное поле. Важнейшей характеристикой как магнитного метаатома, так и всего метаматериала является магнитная проницаемость.

Адекватное теоретическое описание магнитной проницаемости является важной задачей при исследовании и создании магнитных метаматериалов для предсказания их свойств. Первые попытки теоретического расчета эффективной магнитной проницаемости базировались на приближении эффективной среды и либо не рассматривали

возможность элементов взаимодействовать друг с другом [9], либо проводились в частотном диапазоне, соответствующем однородному возбуждению магнитного метаматериала [10]. В то же время известно, что взаимодействие метаатомов оказывает существенное влияние на свойства метаматериала и приводит к распространению магнитоиндуктивных волн (МИ волн) [11, 12]. В полосе пропускания этих волн - вблизи резонансной частоты метаатомов -наблюдается сильное неоднородное возбуждение метаматериала, что означает неприменимость модели эффективной магнитной проницаемости для данного частотного диапазона. В предыдущих работах в нашей группе была предложена теоретическая модель для расчета локальной магнитной проницаемости в полосе пропускания МИ волн на основе сигналов, получаемых от отдельных метаатомов [13, 14]. Однако позже, посредством эксперимента, была показана недостаточная точность предложенной теории при попытках предсказания точных количественных значений магнитной проницаемости метаповерхности [15].

Основной целью данной работы является разработка нового математического и программного аппарата для расчёта локальной магнитной проницаемости вблизи магнитной метаповерхности с учётом конечных размеров метаатомов.

Для достижения поставленной цели в процессе работы было необходимо

решить несколько задач. В частности:

- ✓ Изучить существующие методы для расчёта магнитных полей и магнитной проницаемости вблизи отдельных метаатомов и метаповерхности.
- ✓ Рассмотреть набор моделей для учёта конечных размеров метаатомов.
- ✓ Разработать качественно новую методику для расчёта магнитных полей и магнитной проницаемости вблизи отдельных метаатомов и метаповерхности, применимую к различным геометрическим моделям метаатомов.

- ✓ Проверить достоверность результатов, получаемых с использованием разработанной методики, путём сравнения с результатами уже существующих методик, основанных на первопричинных расчётах.
- ✓ Сравнить полученные результаты с результатами эксперимента.

ГЛАВА 1. МЕТОДЫ РАСЧЁТА МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ МЕТАМАТЕРИАЛОВ

1.1. Магнитная проницаемость метаматериалов

1.1.1. Эффективная проницаемость аддитивного метаматериала

Магнитная проницаемость – важнейшая из величин, характеризующих магнитные свойства материала. Это подтверждается присутствием данной величины в уравнениях Максвелла – основополагающих соотношениях электродинамики.

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}, \quad (1)$$

где B – индукция магнитного поля, H – напряжённость магнитного поля, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

Магнитную проницаемость изучают уже более сотни лет, так как эта характеристика присуща каждому из окружающих нас материалов. Но в особенности исследователей интересует проницаемость в тех материалах, где наблюдаются значения проницаемости, отличающиеся от привычных. Хорошим примером таких материалов могут быть магнитные метаматериалы, состоящие из расщеплённых кольцевых резонаторов, где проницаемость может принимать отрицательные значения.

С появлением нового класса материалов встала проблема аналитического описания магнитной проницаемости. Впервые решение этой проблемы было предложено в работе J.V. Pendry [9], где была исследована проницаемость различных метаматериалов в ГГц диапазоне частот. В

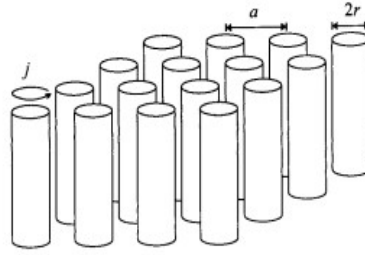


Рисунок 1.1.1 – Система из параллельных проводящих цилиндров для расчета μ_{eff} . a – расстояние между центрами цилиндров, r – радиус [9].

качестве метаатомов сперва рассматривались металлические проводящие цилиндры, далёкие по форме от кольцевых резонаторов. Позже был совершён переход к двойным расщепленным коаксиальным цилиндрам и двойным расщепленным кольцевым резонаторам, размеры которых были много меньше длины волны ЭМ излучения (Рис. 1.1.2).

В качестве основной модели при расчете магнитной проницаемости использовалась модель метаматериала как бесконечной периодической структуры, в которой магнитное поле, создаваемое поверхностным током метаатома, усреднялось в кубической элементарной ячейке структуры, содержащей метаатом (Рис.1.1.1).

Результаты расчетов магнитной проницаемости μ_{eff} показали, что для структуры из параллельных проводящих цилиндров магнитная проницаемость не может быть отрицательной или больше единицы.

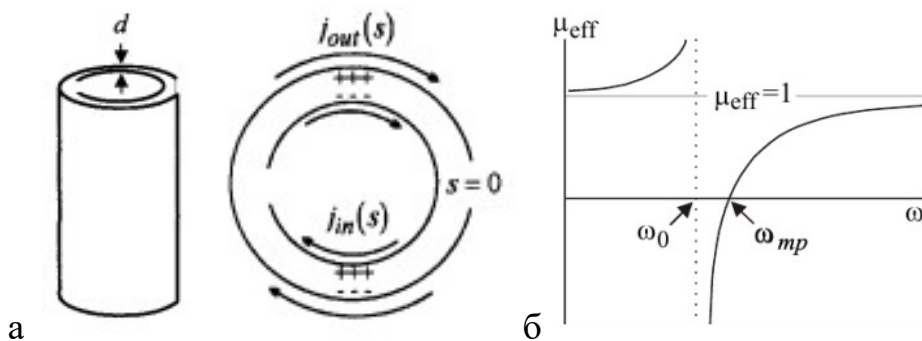


Рисунок 1.1.2 – Метаатом, состоящий из двойных расщепленных коаксиальных цилиндров и его магнитная проницаемость [9].

Переход к метаатомам более сложного вида в виде расщепленных двойных цилиндров (Рис.1.1.2а) позволил учесть собственную емкость метаатомов. Учет емкости двойных расщепленных коаксиальных цилиндров, которые также обладают собственной индуктивностью, привел к тому, что частотная зависимость μ приобрела резонансный характер (Рис.1.1.2б). Отрицательное значение эффективной магнитной проницаемости достигается на интервале частот при $\omega_0 < \omega < \omega_{mp}$, где ω_0 – резонансная частота, ω_{mp} – аналог плазменной частоты для магнитной проницаемости, определяемые через геометрические параметры метаматериала. Данный интервал частот полностью определяется геометрическими параметрами метаатомов.

От плоского метаматериала, состоящего из параллельных двойных расщепленных коаксиальных цилиндров, легко перейти к 3D метаматериалу, состоящему из двойных расщепленных колец (Рис.1.1.3а), разделив цилиндры на множество плоскостей перпендикулярно образующей цилиндра. При выводе зависимостей $\mu(\omega)$ в работе Pendry были использованы предположения, что плоскости колец находятся достаточно близко друг к другу, и линии магнитного поля, индуцированного токами в кольцах, близки по форме линиям поля внутри длинных цилиндров.

В данной модели для расчета μ метаматериал рассматривался как аддитивная среда, так как не учитывалось взаимодействие мета-атомов друг с другом. Также, использованные выше предположения не выполняются для

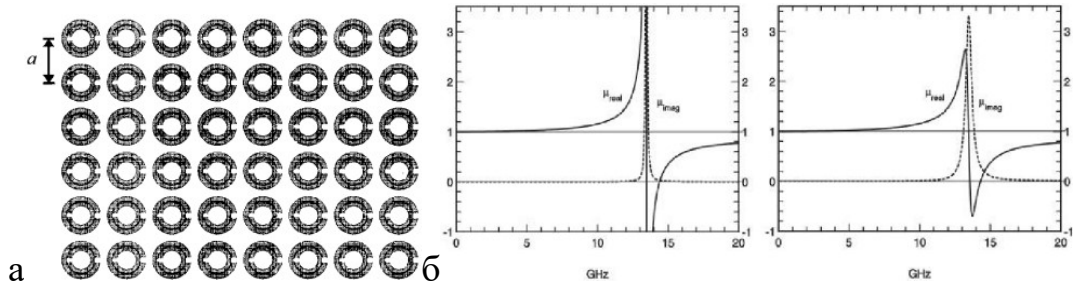


Рисунок 1.1.3 – Структура из расщеплённых кольцевых резонаторов и зависимость её магнитной проницаемости μ от частоты для различных значений проводимости метаатомов [9].

метаматериалов, состоящих из одного слоя – метаповерхностей. Поэтому рассмотрим далее немного иной подход к расчёту μ , учитывающий взаимодействие метаатомов.

1.1.2. Эффективная проницаемость бесконечного метаматериала с учетом взаимодействия метаатомов

Следующая методика расчета эффективной магнитной проницаемости метаматериала была предложена в работе M.Gorkunov et al [10]. Авторы исследовали магнитную проницаемость неограниченной периодической структуры в виде параллельных плоскостей взаимодействующих расщепленных кольцевых резонаторов в планарной конфигурации (Рис.1.1.4) с учетом взаимодействия элементов. Метаматериал помещался во внешнее однородное переменное магнитное поле $H_z = H_{0z} * \exp(-i\omega t)$. По закону электромагнитной индукции в каждом метаатоме с площадью радиуса r_0 возникает ЭДС:

$$E_n = -i\omega\mu_0SH \quad (2)$$

С другой стороны, для этого же элемента номером n можно записать закон Кирхгофа, который при учете индуктивной связи метаатомов имеет вид:

$$E_n = Z_0 I_n + \sum_{m \neq n} Z_{mn} I_m, \quad (3)$$

где I_n – ток, наведенный в n -м метаатоме, где $Z_0 = i\omega L + 1/i\omega C + R$ – импеданс резонансного элемента, Z_{mn} – взаимной импеданс для пары метаатомов.

В данной модели снова рассматривается бесконечный метаматериал, в однородном внешнем магнитном поле, следовательно, авторы логично предполагают, что в различных метаатомах возбуждаются одинаковые токи,

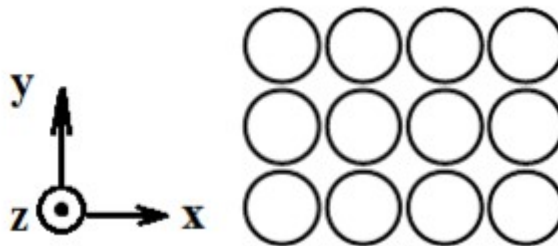


Рисунок 1.1.4 – Модель бесконечного метаматериала, состоящего из взаимодействующих тонких кольцевых резонаторов в планарной конфигурации [10].

т.е. $I_n = I$.

Соответствующие магнитные моменты колец с током, равные $I\pi r_0^2$, формируют намагниченность метаматериала, которая в рассматриваемой геометрии имеет только z-компоненту:

$$M_z = n_0 I \pi r_0^2, \quad (4)$$

где n_0 – объемная концентрация метаатомов. Далее была получена связь намагниченности бесконечного метаматериала с внешним полем H_0 :

$$(Z + \sum_{m \neq n} Z_{mn})M_z = i\omega\pi^2 r_0^4 n_0 \mu_0 H_0. \quad (5)$$

Таким образом, авторы учли взаимодействие метаатомов в выражении для намагниченности метаматериала, которое в свою очередь они использовали для нахождения эффективной магнитной проницаемости μ_{zz} по формуле:

$$\mu_{zz} = \frac{B_z}{B_z - \mu_0 M_z}, \quad (6)$$

где $B_z = \mu_0 H_{0z} + n_0 \mu_0 \int H_l(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$, H_{0z} – внешнее поле, $H_l(\mathbf{r})$ – вклад в напряженность магнитного поля, создаваемого каждым кольцом с током, рассчитанный по закону Био-Савара-Лапласа. В итоге, расчёт по новой модели приводит к сдвигу резонансной частоты проницаемости материала относительно резонансной частоты отдельного метаатома, как следствие взаимодействия метаатомов. Полученный теоретически сдвиг резонанса зависит от расстояния между центрами кольцевых резонаторов, которое и определяет величину взаимодействия метаатомов.

Предположение о бесконечности метаматериала в данной модели сильно ограничивает её применимость, поэтому возникает необходимость учёта конечных размеров метаматериала.

1.1.3. Эффективная проницаемость метаматериала конечных размеров

Следующим шагом в развитии теории магнитной проницаемости метаматериалов можно считать работу E.Shamonina и L.Solymar 2004 года [16]. Авторы провели аналогию между магнитными полями 3D метаматериала конечных размеров и классического диамагнитного материала

с отрицательным значением μ . Они использовали модель метаматериала, состоящего из конечного числа N расщепленных кольцевых резонаторов, расположенных в планарной конфигурации в параллельных плоскостях (планарно-аксиальная конфигурация). Снова рассматривалось возбуждение токов в метаатомах внешним переменным магнитным полем. Однако, учёт конечных размеров метаматериала привёл к тому, что токи во всех метаатомах уже нельзя было считать равными.

Для нахождения токов во всех метаатомах закон Кирхгофа (3) был переписан в матричном виде:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z} \mathbf{I}, \quad (7)$$

где \mathbf{V} и \mathbf{I} – N -мерные векторы напряжений и токов в элементах, соответственно, \mathbf{Z} – матрица импедансов размерности $N \times N$, диагональным элементам которой соответствует собственный импеданс метаатома Z_0 , все остальные элементы Z_{mn} характеризуют взаимоиндукцию между элементами. Токи для всех метаатомов можно получить, решив уравнение (7). Суммарное магнитное поле рассчитывалось с учетом вклада полей от каждого мета-атома.

Было показано, что в определенном частотном диапазоне достаточно далеко от резонансной частоты ω_0 такой метаматериал демонстрирует сильный диамагнитный отклик (Рис.1.1.5). И подобно диамагнетику, при однородном возбуждении метаматериал с отрицательным значением μ выталкивает внешний магнитный поток из области, размеры которой зависят не только от частоты, но также и от величины взаимодействия метаатомов, размеров и формы метаматериала.

Следует отметить, что в данной работе, как и во всех предыдущих, рассматривалось однородное возбуждение метаматериала, т.е. токи в резонаторах либо равны между собой, либо близки по значению. Это позволяет усреднять значение магнитной проницаемости и описывать отклик метаматериала с помощью такого понятия, как эффективная магнитная проницаемость $\mu_{эфф}$.

Чтобы оценить область применимости данного приближения позднее было проведено подробное исследование эффективной магнитной проницаемости метаматериала в широком частотном диапазоне. В качестве метаатомов рассматривались кольца без емкостной нагрузки (Рис.1.1.16а) [17]. В этой работе было получено частотное распределение значений

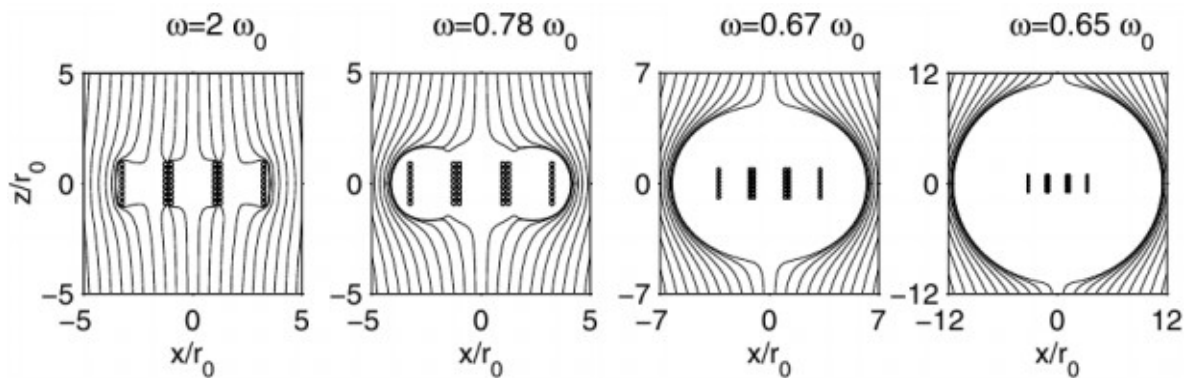


Рисунок 1.1.5 – 3D метаматериал (вид в плоскости XZ) и линии суммарного магнитного потока при однородном возбуждении метаматериала на различных частотах вдали от резонансной частоты метаатомов ω_0 [16].

действительной части магнитной проницаемости при изменении радиуса колец в пределах от 10 нм до 10 см (Рис.1.1.6б). Можно чётко выделить область, в которой значение магнитной проницаемости близко к 1, и область, в которой наблюдается диамагнитный отклик метаматериала.

Также на Рис.1.1.6б был впервые отмечен участок неприменимости понятия эффективной магнитной проницаемости. Это связано с тем, что вблизи резонансной частоты метаатомов возникают коллективные

возбуждения, вызванные взаимодействием метаатомов – уже упоминавшиеся магнитоиндуктивные волны [11,12]. В полосе пропускания магнитоиндуктивных волн возбуждение метаматериала становится в крайней степени неоднородным, и очевидно, что понятие эффективной магнитной проницаемости не применимо. Поэтому, для описания свойств метаматериала следует перейти к понятию локальной магнитной проницаемости, о чем пойдет речь далее.

1.2. Локальная магнитная проницаемость метаповерхностей

Теоретическая модель для расчета локальной магнитной проницаемости в окрестности резонансной частоты метаатомов на основе

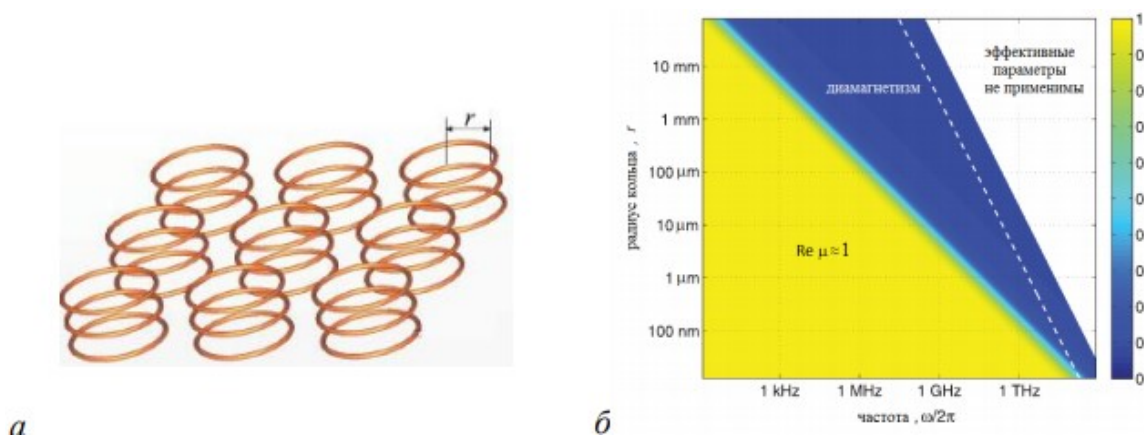


Рисунок 1.1.6 – Распределение значений действительной части эффективной магнитной проницаемости метаматериала, состоящего из нерезонансных колец (а), в зависимости от частоты и радиуса кольца r (б). Белой пунктирной линией обозначена граница применимости модели расчета μ . Из работы [17].

отклика индивидуальных метаатомов была предложена в работе [13]. Модель

учитывает взаимодействие метаатомов, и распространение магнитоиндуктивных волн в метаповерхности конечных размеров [11,12]. В качестве метаатомов были выбраны расщепленные кольцевые резонаторы с радиусом $r_0=11.5\text{мм}$ и резонансной частотой $\omega_0=50.85\text{ МГц}$. Локальная магнитная проницаемость рассчитывалась для метаповерхности конечного размера, состоящей из $N \times N$ метаатомов, расположенных в плоскости XY с расстоянием 1мм между краями (Рис.1.2.1).

Расчет токов в метаатомах, возбужденных внешним однородным магнитным полем H_0 , проводился аналогично тому, как было описано в разделе 1.1.3, из уравнения с обратной матрицей импедансов:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{V}. \quad (8)$$

В МГц диапазоне характер взаимодействия метаатомов является исключительно магнитным, поэтому недиагональные элементы матрицы импедансов равны $Z_{ij} = -i\omega M_{ij}$, где M_{ij} – коэффициент взаимной индукции элементов i и j .

В магнитных метаматериалах в МГц диапазоне характеристикой взаимодействия метаатомов является коэффициент взаимодействия между ними:

$$\kappa = \frac{2M_{ij}}{L}. \quad (9)$$

При моделировании учитывалось взаимодействие между ближайшими в ряду или линии метаатомами, а также между ближайшими соседями по диагонали, коэффициенты взаимодействия равнялись $\kappa_1 = -0.1$ и $\kappa_2 = -0.044$, соответственно. Подробно построение матрицы импедансов с учетом взаимодействия описано в работе [18]. Влияние конечных размеров метаматериала и граничных условий заключалось в уменьшении числа соседей по мере приближения к границе. Как следствие, уменьшалось число коэффициентов взаимодействия в матрице импедансов.

В отличие от предыдущих случаев расчета эффективной магнитной проницаемости однородного метаматериала, теперь величина магнитного поля, создаваемого токами в метаатомах, усреднялась только по объему элементарной ячейки метаматериала. Это дало возможность учесть неоднородное распределение токов во всей структуре и получить значения локальной проницаемости $\mu_{\text{лок}}$.

Для этого сначала была определена «локальная намагниченность» в

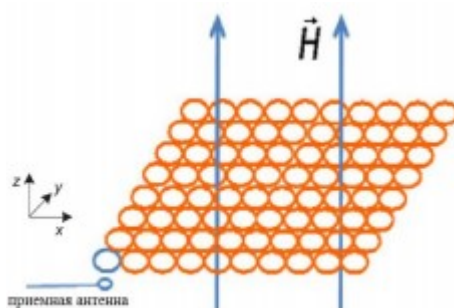


Рисунок 1.2.1 – Модель метаповерхности конечного размера, состоящей из взаимодействующих метаатомов в планарной конфигурации, для расчета локальной магнитной проницаемости. Из работы [13].

элементарной ячейке через значение тока, наведенного в метаатоме,:

$$M_{jz} = n\pi r_0^2 I_j = \frac{f \cdot I_j}{h}, \quad (10)$$

где n – концентрация метаатомов, h – высота метаатома, f – коэффициент заполнения, I_j – ток в j -том метаатоме. Отсюда, локальная магнитная проницаемость в j -том метаатоме равна:

$$\mu_j = 1 + \frac{M_{jz}}{H_0} = 1 + \frac{f \cdot I_j}{h \cdot H_0}. \quad (11)$$

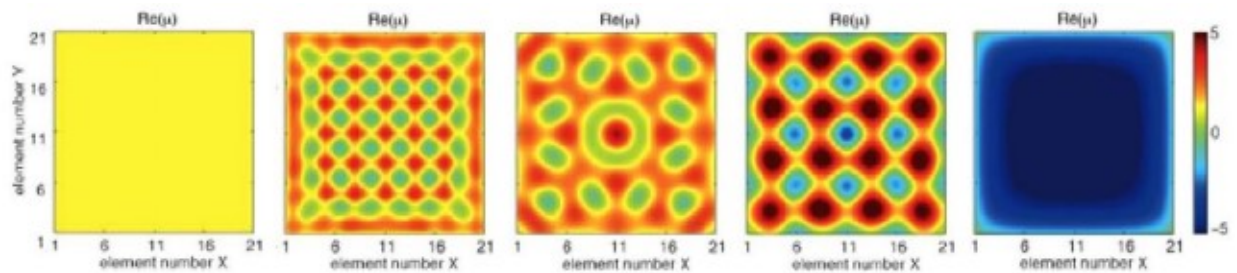


Рисунок 1.2.2 – Моделирование распределения действительной части локальной магнитной проницаемости $Re(\mu)$ в метаповерхности из 21×21 мета-атомов при частотах $\omega = 0.7, 0.9, 1.1, 1.2, 2.3 \omega_0$ (слева направо, соответственно). Из работы [13].

Результаты численных расчетов подтвердили неоднородное распределение значений $\mu_{\text{лок}}$ вблизи резонансной частоты (Рис.1.2.2).

Таким образом, было теоретически показано, что в области распространения магнитоиндуктивных волн понятие эффективной проницаемости неприменимо для описания отклика метаматериала на возбуждение электромагнитным полем.

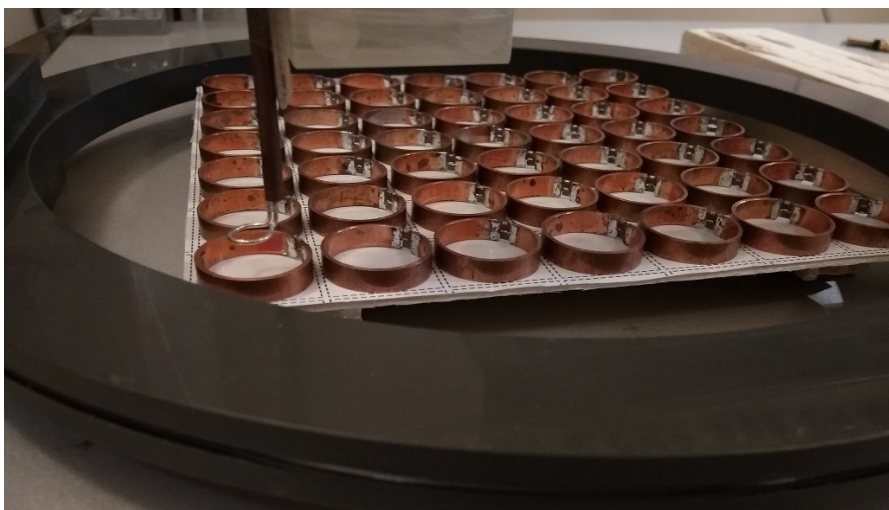


Рисунок 1.2.3 – Внешний вид метаповерхности из 7*7 резонаторов, расположенной внутри рамочной антенны для возбуждения однородным полем, внутренний диаметр антенны 245 мм [15].

Экспериментальное исследование локальной магнитной проницаемости, впервые было приведено в работе [15] в 2018 году.

И, как и предсказывала теория, вдали от резонансной частоты индивидуальных метаатомов было получено однородное возбуждение метаматериала, которое можно описывать, используя концепцию эффективной проницаемости $\mu_{эфф}$ (Рис. 1.2.4). Именно вдали от резонансной частоты проводится наибольшее количество исследований метаматериалов и метаповерхностей. В то время как при резонансном характере отклика метаатомов на возбуждение, наиболее желаемые – максимальные - значения магнитных характеристик метаповерхностей находятся непосредственно внутри полосы пропускания МИ волн. Стоит отметить, что именно вдали от полосы пропускания уместно использовать модели расчёта магнитной проницаемости для бесконечных метаповерхностей, т.к. для центральных областей можно получать приемлемые результаты. Однако вблизи границ при этом неизбежны расхождения результатов расчётов и реальных значений.

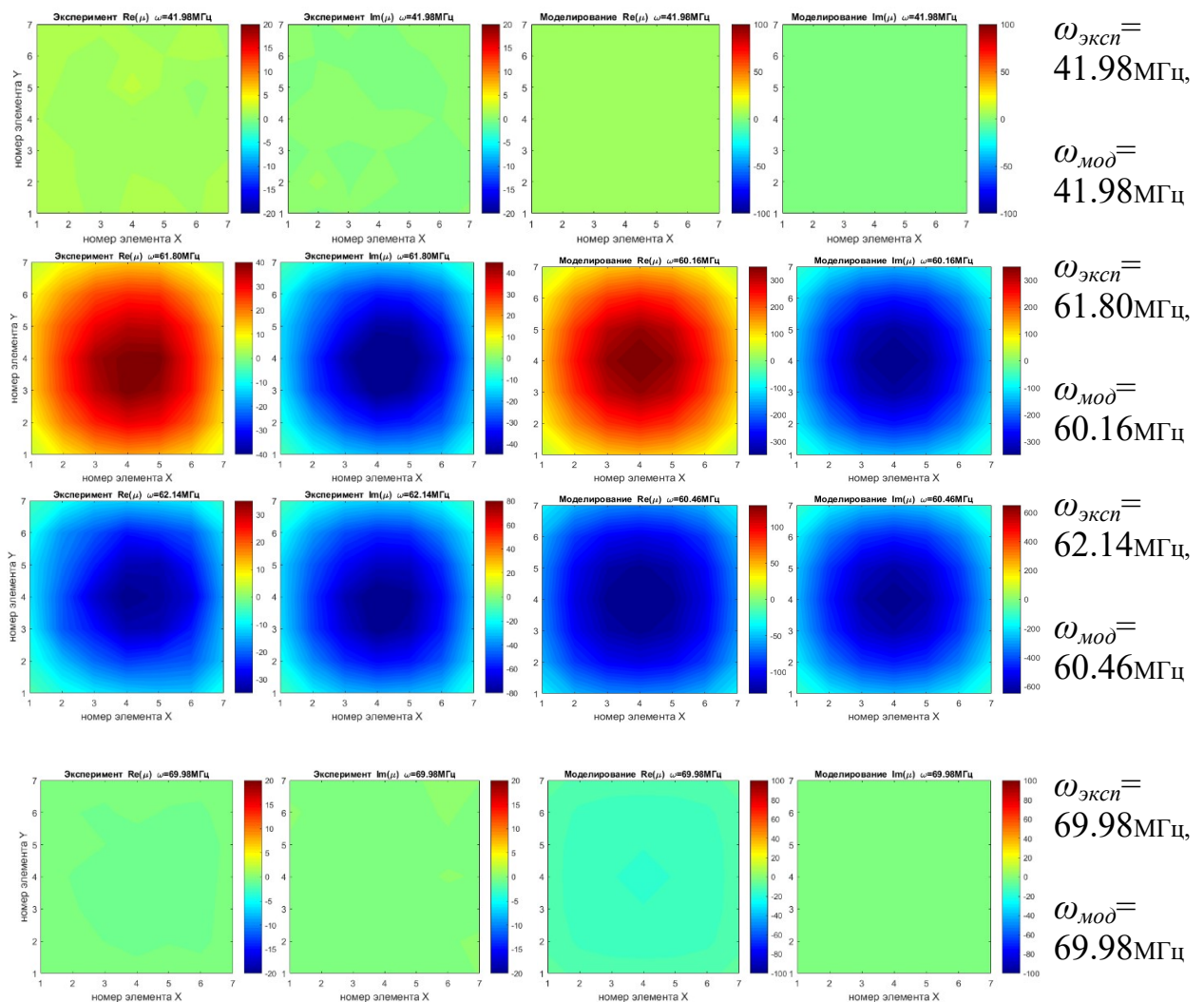


Рисунок 1.2.4 – Локальная магнитная проницаемость при возбуждении метаповерхности 7×7 мета-атомов однородным полем. Слева направо: экспериментальные значения реальной части $Re(\mu)$ и мнимой части $Im(\mu)$ на высоте 3 мм над поверхностью, результаты моделирования $Re(\mu)$ (в) и $Im(\mu)$ в центрах мета-атомов; значения частот $\omega_{эксп}$ и $\omega_{мод}$ показаны справа. Из работы [15].

В то время как вблизи резонансной частоты ω_0 возбуждение метаповерхности в однородном поле становится существенно неоднородным из-за распространения магнитоиндуктивных волн, и для описания метаматериала можно использовать только локальную магнитную проницаемость $\mu_{лок}$. (Рис.1.2.6).

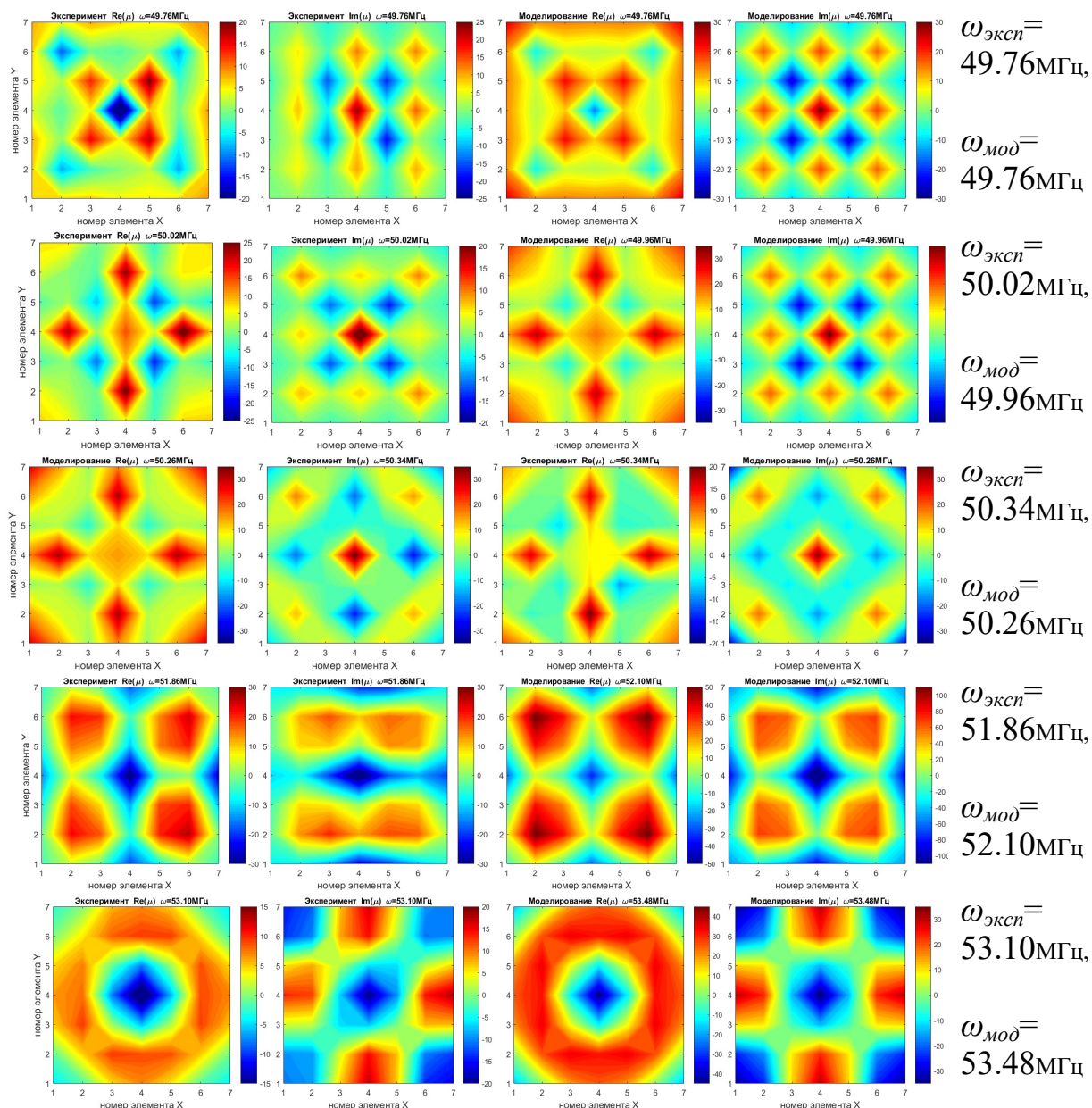


Рисунок 1.2.5 – Локальная магнитная проницаемость при возбуждении метаповерхности 7×7 мета-атомов однородным полем. Слева направо: экспериментальные значения реальной части $Re(\mu)$ и мнимой части $Im(\mu)$ на высоте 3 мм над поверхностью, результаты моделирования $Re(\mu)$ (в) и $Im(\mu)$ в центрах мета-атомов; значения частот $\omega_{\text{эксп}}$ и $\omega_{\text{мод}}$ показаны справа. Из работы [15].

Отмечу хорошее качественное согласие экспериментальных и теоретических данных. В частности, очевидно хорошее совпадение характера частотных зависимостей для реальной и мнимой частей проницаемости, полученных в эксперименте и предсказанных в теории. Однако, если

подробнее посмотреть на численные значения, то величина значений $\mu_{\text{лок}}$ предсказанных теоретически и полученных в эксперименте отличается (Рис.1.2.6).

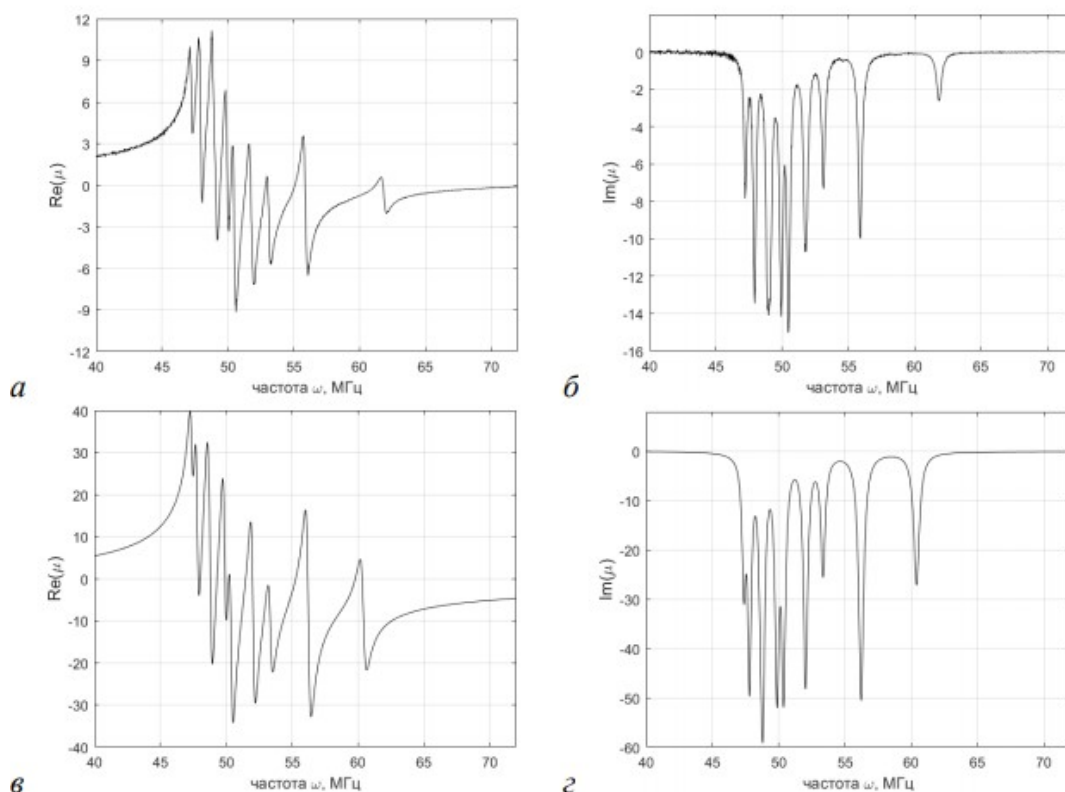


Рисунок 1.2.6 – Локальная магнитная проницаемость в центре квадратной метаповерхности из 7×7 мета-атомов при локальном возбуждении в центре. Частотная зависимость реальной (а, в) и мнимой (б, г) частей локальной магнитной проницаемости $Re(\mu)$ и $Im(\mu)$. Эксперимент (а, б) и моделирование с учетом взаимодействия соседей вплоть до третьего порядка (в, г). Резонансная частота элементов $\omega_0 = 50.83$ МГц. Расстояние между краями ближайших элементов 1 мм, коэффициенты взаимодействия $\kappa_1 = -0.12, \kappa_2 = -0.03, \kappa_3 = -0.01$. Из работы [15].

Отсюда логично вытекает необходимость построения теоретического аппарата, для адекватного описания локальной магнитной проницаемости метаповерхностей из резонансных элементов.

В частности, необходимо учесть не только конечные размеры метаматериала, но и конечные размеры самих метаатомов, поскольку все предыдущие теории рассматривали метаатомы как бесконечно тонкие кольца с током. Более того, до настоящего времени не учитывалось неоднородность распределения магнитного поля тока вблизи метаатома. Кроме этого, предложенные методы расчета должны быть удобны в применении и не требовать большого времени счета. Решению данных задач и посвящена настоящая работа.

ГЛАВА 2. МОДЕЛИ И МЕТОДЫ РАСЧЁТА

2.1. Модели

2.1.1. Параметры моделируемых метаатомов

Предметом исследования и моделирования в данной работе являются расщепленные кольцевые резонаторы - медные кольца (Рис. 2.1.1). Внешний диаметр - 23 мм, толщина - 1 мм, высота - 5 мм, щель - 1 мм. Собственная резонансная частота элементов, определяемая их линейными размерами, составляла около 1.8 ГГц. Для уменьшения резонансной частоты в зазор щели были впаяны конденсаторы с постоянной номинальной ёмкостью 330 пФ и подстроечные конденсаторы емкостью 5-20 пФ. Это привело к уменьшению собственной резонансной частоты приблизительно в 40 раз до целевого значения 50 МГц. Данные метаатомы предназначались для сборки плоской квадратной метаповерхности, со сторонами до 7 элементов, и, таким образом, состоящей из 49 метаатомов.

При моделировании учитывались все параметры метаатомов: их линейные размеры, резонансная частота, добротность, электрическое сопротивление и ёмкости впаянных конденсаторов (Таблица 1).

Таблица 2.1.1 Параметры метаатомов

	Эксперимент	Моделирование
f_0 , МГц	50.96	50.85
Q	145.6	141.7
C, пФ (постоянный)	330	340
C, пФ (подстроечный)	5-20	

$R, \text{ Ом}$		0.065
-----------------	--	-------

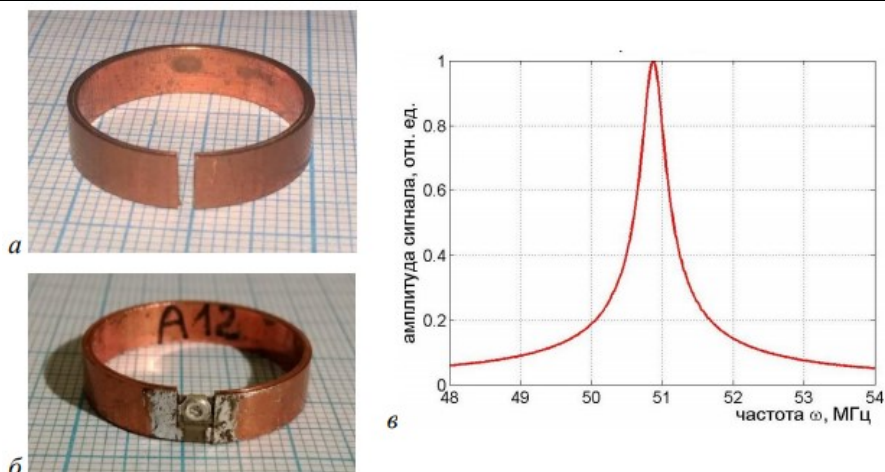


Рисунок 2.1.1 – Внешний вид расщепленных кольцевых резонаторов с резонансом в ГГц диапазоне (а) и в МГц диапазоне за счет впаянных конденсаторов (б). Резонансная частота $\omega_0=50.83$ МГц, добротность $Q=145.6$. Амплитудно-частотная характеристика метаатома (в) из работы [15].

2.1.2. Кольцо из бесконечно тонкого провода

В качестве первой и самой простой модели было выбрано кольцо из бесконечно тонкого провода. Единственным линейным размером в данной модели является диаметр кольца, равный 22 мм, совпадающий со средним диаметром моделируемого резонатора.

Несмотря на свою грубость, данная модель обладает огромным преимуществом перед всеми другими – простотой. Это в свою очередь обеспечивает максимальную скорость вычислений в пакете MATLAB, по сравнению с другими моделями. В случае, если отличие получаемых результатов от экспериментальных будет в пределах допустимого, выигрыш в скорости вычислений может сыграть решающую роль при окончательном выборе модели для расчёта.

Однако, стоит отметить, что данная модель не является предпочтительной при численном моделировании в пакете CST по ряду причин. Во-первых, в данном пакете необходимо предварительно создать 3D

модель элемента, а значит, провод заведомо невозможно сделать бесконечно тонким. Во-вторых, для получения

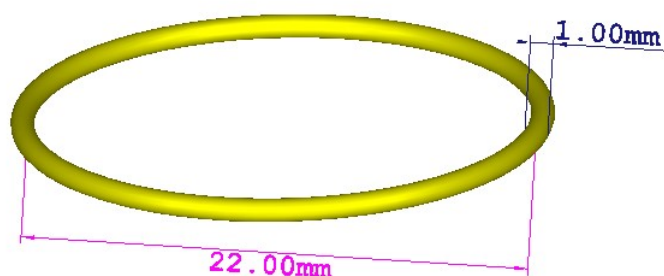


Рисунок 2.1.2 – Внешний вид и линейные размеры кольца из тонкого провода при моделировании в пакете CST.

удовлетворительных результатов в данном пакете необходимо разбивать область моделирования на пространственные ячейки с линейными размерами того же порядка, что и минимальный линейный размер модели. Таким образом, при устремлении диаметра поперечного сечения провода к нулю, мы получаем огромную разницу между минимальным и максимальным линейными размерами модели. Это приводит к резкому росту количества ячеек, на которые мы разбиваем пространство и соответственно к росту времени вычислений вплоть до недель. В виду бессмысленности подобного рода вычислений для моделирования одного элемента диаметр поперечного сечения провода в пакете CST был задан 1 мм (Рис. 2.2.1).

2.1.3. Цилиндрическое бесконечно тонкое кольцо конечной высоты

Усложнение рассматриваемых моделей происходит путём последовательного увеличения количества учитываемых линейных размеров резонатора. Во второй по счёту модели к учёту диаметра резонатора добавляется учёт его высоты. Таким образом, бесконечно тонкий провод переходит в бесконечно тонкое кольцо конечной высоты. Данная модель уже не является такой грубой, как предыдущая, и становится весьма похожа на реальный резонатор, в то же время, сохраняя относительную простоту.

Данная модель подробно исследовалась в пакете MATLAB.

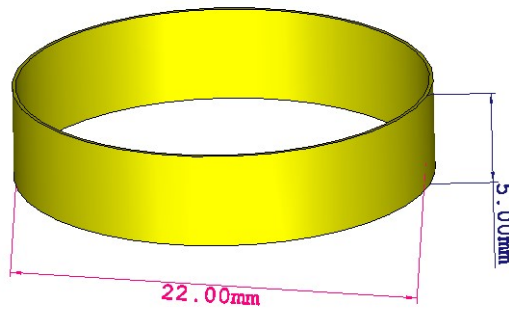


Рисунок 2.1.3 – Внешний вид и линейные размеры цилиндрического бесконечно тонкого кольца конечной высоты.

2.1.4. Двойное цилиндрическое кольцо конечной высоты

В третьей по счёту модели учитываются уже три линейных размера резонатора: внутренний диаметр, внешний диаметр и высота. Данная модель всё ещё остаётся некоторым упрощением геометрии реального резонатора, но в то же время достаточно точно повторяет его контур. Этот факт позволяет сделать предположение о превосходстве точности данной модели по сравнению с предыдущими. Однако время, затрачиваемое на расчёт данной модели, должно в два раза превышать время расчёта одного бесконечно тонкого кольца, и выигрыш в точности может оказаться неоправданным.

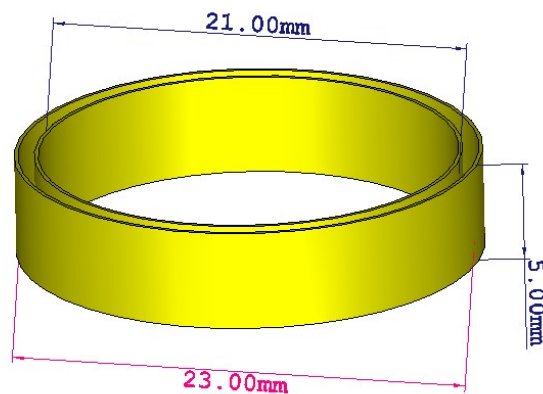


Рисунок 2.1.4 – Внешний вид и линейные размеры двойного цилиндрического кольца конечной высоты.

2.1.5. Резонатор реальной геометрии

Финальным этапом уточнения и усложнения модели является резонатор реальной геометрии, учитывающий все линейные размеры, включая щель. Данная модель точно повторяет поверхность реального резонатора, т.к. к боковым поверхностям, учтённым в предыдущей модели, добавляются верхняя и нижняя поверхности, а также поверхности внутри щели. В свою очередь это приводит к значительному усложнению вычислений в силу того, что ново-учтённые поверхности качественно отличаются от боковых.

Учитывая вышеизложенные трудности в расчёте модели, можно заранее усомниться в её целесообразности. Разумеется, нельзя забывать тот факт, что это единственная модель, учитывающая наличие щели, а значит и наличие некоторой асимметрии. Однако исследуемая характеристика резонатора, локальная проницаемость, является величиной, усредняемой по площади измеряющей антенны. Поэтому влияние наличия щели на величину локальной магнитной проницаемости будет утрачено в процессе усреднения.

Несмотря на это, данная модель обладает неоспоримым преимуществом – возможностью сравнить полученные результаты расчета не только между различными средами моделирования, но и с результатами эксперимента. Поэтому она была реализована и исследована в пакетах MATLAB и CST.

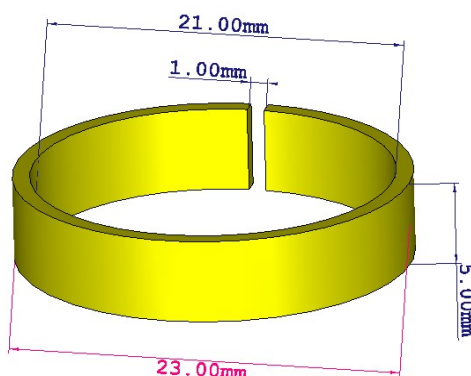


Рисунок 2.1.5 – Внешний вид и линейные размеры резонатора реальной геометрии.

2.2. Методы расчета

2.2.1. Метод численного интегрирования в CST

В качестве одной из сред моделирования исследуемого резонатора использовался современный мощный программный пакет трехмерного моделирования - CST. Данная программа позволяет изучать крайне широкий спектр объектов и явлений, в том числе численно решать из первых принципов задачи электростатики, магнитостатики, динамики тепловых процессов и, наконец, задачи электродинамики. С целью получения оптимального набора инструментов для решения поставленной нами задачи был выбран программный модуль CST Microwave Studio. Данный модуль позволяет конструировать трехмерные модели резонаторов с помощью черчения простейших геометрических форм; создавать источники возбуждения нескольких типов; задавать граничные и начальные условия. После чего происходит разбиение всего исследуемого пространства на сетку заданной точности и из первых принципов производится расчет ЭМ поля в каждой точке разбиения.

Подобная методика проведения численных экспериментов уже использовалась в работах [19,20]. Поскольку результаты моделирования до сих пор демонстрировали хорошее согласие с экспериментальными данными,

есть основание доверять результатам моделирования, полученным по тем же методикам в данной работе.

Перед началом работы с данным программным пакетом была изучена документация по методам расчета, реализованным в нём. После ознакомления с их возможностями, для моделирования ЭМ полей расщепленных кольцевых резонаторов был выбран метод конечного интегрирования во временной области (Time Domain Solver) [21]. Важной особенностью решения во временной области является пропорциональная зависимость требуемых вычислительных ресурсов от размеров исследуемой структуры.

В основе этого метода лежит последовательная дискретизация уравнений Максвелла в интегральной форме на временном интервале:

$$\oint_{\partial A} \bar{E} \cdot d\bar{s} = - \oint_A \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{A}, \quad (12)$$

$$\oint_{\partial V} \bar{D} \cdot d\bar{A} = \int_V \rho dV, \quad (13)$$

$$\oint_{\partial A} \bar{H} \cdot d\bar{s} = \oint_A \left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{J} \right) \cdot d\bar{A}, \quad (14)$$

$$\oint_{\partial V} \bar{D} \cdot d\bar{A} = 0. \quad (15)$$

где \bar{E} и \bar{H} – вектора напряжённостей, а \bar{D} и \bar{B} – векторы индуктивностей электрического и магнитного полей, соответственно, V – рассматриваемый объём, A – поверхность, его ограничивающая.

Для того чтобы провести расчет, необходимо задать конечную область для вычислений, ограничивающую исследуемый объект. Разбиение этой

области приводит к образованию многочисленных пространственных ячеек. Первичное разбиение можно отобразить прямо в интерфейсе программы CST, однако для вычисления также создаётся вторичное разбиение ортогонально первому. Пространственная дискретизация уравнений Максвелла в конечном итоге реализуется именно на этих двух решётках.

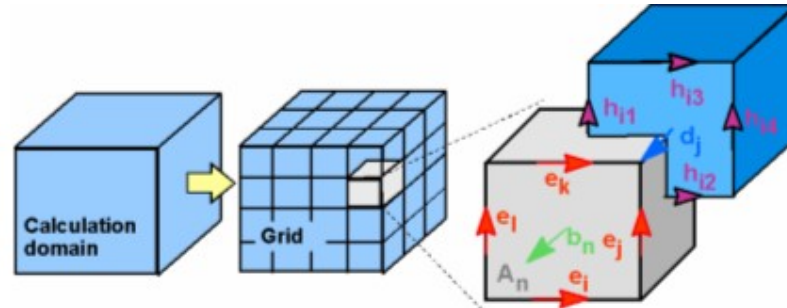


Рисунок 2.2.1 – Процесс разбиения области вычислений на две ортогональные решётки.

Векторы электрического напряжения на рёбрах \mathbf{e} и магнитного потока через грани \mathbf{b} располагаются на первичной решётке, а векторы магнитного напряжения на рёбрах \mathbf{h} и диэлектрического потока через грани \mathbf{d} определяются для вторичной решётки (Рис. 2.2.1).

Теперь уравнения Максвелла формулируются для каждой грани каждой ячейки по отдельности. Учитывая закон электромагнитной индукции Фарадея, интеграл по контуру в уравнении (12) может быть записан как сумма четырёх электрических напряжений на гранях, без внесения каких-либо погрешностей. В то же время, производная по времени от магнитного потока, определённого на ячейке первичной сетки в точности соответствует правой части этого же уравнения. И таким образом уравнение (12) можно переписать в новом виде:

$$e_i + e_j - e_k - e_l = -\frac{\partial}{\partial t} b_n. \quad (16)$$

Повторяя процедуру для всех возможных граней ячейки, можно получить вычислительное правило в матричной формулировке, введя топологическую матрицу \mathbf{C} , как дискретный аналог оператора ротора:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{pmatrix} e_i \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_k \\ \vdots \\ e_l \\ \vdots \\ e \end{pmatrix}}_{\mathbf{e}} = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot \\ \vdots \\ b_n \\ \vdots \\ \cdot \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}. \quad (17)$$

Применение этой же схемы к закону Ампера на двойной решётке приводит к определению соответствующего вторичного оператора $\tilde{\mathbf{C}}$. Прodelывая схожие преобразования по дискретизации для остальных уравнений, можно получить дискретные аналоги операторов дивергенции для первичной \mathbf{S} и вторичной $\tilde{\mathbf{S}}$ решёток, соответственно. Как было отмечено ранее, все элементы этих матриц принимают значения «0», «1» и «-1», отображая исключительно топологическую информацию. В итоге, мы получим полный набор дискретизированных уравнений Максвелла:

$$\mathbf{C}\mathbf{e} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{b}, \quad (18)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{d} = \mathbf{q}, \quad (19)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{h} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{d} + \mathbf{j}, \quad (20)$$

$$\mathbf{S}\mathbf{b} = 0. \quad (21)$$

Стоит отметить, что все проведённые преобразования не приводят к появлению погрешности дискретизации. Более того, дискретные аналоги

операторов ротора и дивергенции сохраняют важные свойства своих непрерывных аналогов:

$$\mathbf{SC} = \tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{0} \leftrightarrow \text{div rot} \equiv 0, \quad (22)$$

$$\mathbf{CS}^T = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{S}}^T = \mathbf{0} \leftrightarrow \text{rot grad} \equiv 0. \quad (23)$$

В некоторых случаях уже сам факт дискретизации численного алгоритма может привести к его нестабильности. Однако, опираясь на полученные выше фундаментальные соотношения, можно показать, что метод конечного интегрирования не страдает от подобных проблем, так как в нём соблюдаются законы сохранения заряда и энергии [22].

Однако, недостающие материальные уравнения вносят неизбежную численную неточность, вызванную пространственной дискретизацией. При задании необходимых соотношений между напряжениями и потоками, их интегральные значения необходимо аппроксимировать вдоль рёбер ячеек и их граней соответственно. Как следствие, получаемые коэффициенты зависят от усреднённых характеристик материалов, а также от пространственного разрешения сетки и могут быть представлены в виде:

$$\bar{\mathbf{D}} = \varepsilon \bar{\mathbf{E}} \rightarrow \mathbf{d} = \mathbf{M}_\varepsilon \mathbf{e}, \quad (24)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mu \bar{\mathbf{H}} \rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{M}_\mu \mathbf{h}, \quad (25)$$

$$\bar{\mathbf{J}} = \sigma \bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{J}}_s \rightarrow \mathbf{j} = \mathbf{M}_\sigma \mathbf{e} + \mathbf{j}_s. \quad (26)$$

Теперь имеющихся уравнений достаточно для решения задачи о распределении электромагнитных полей в пространстве. Для их разрешения производная по времени считается по известной явной схеме «крест» (leapfrog scheme) (Рис. 2.2.2). Явные схемы интегрирования по времени условно устойчивы. Условие стабильности для шага по времени должно

выполняются в каждой пространственной ячейке с размерами $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ и может быть получено из критерия Куранта - Фридрихса – Леви:

$$\Delta t \leq \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z}\right)^2}}. \quad (27)$$

2.2.2. Особенности расчета моделей в CST

Обладая достаточно глубоким пониманием принципов расчёта электромагнитных полей в программе CST, можно приступить к непосредственному моделированию исследуемых резонаторов. Однако, уже на этапе создания 3D модели возникают непредвиденные трудности различного характера.

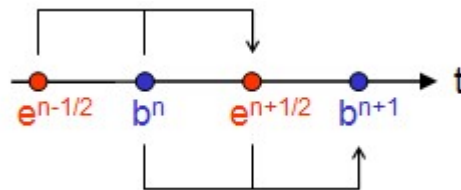


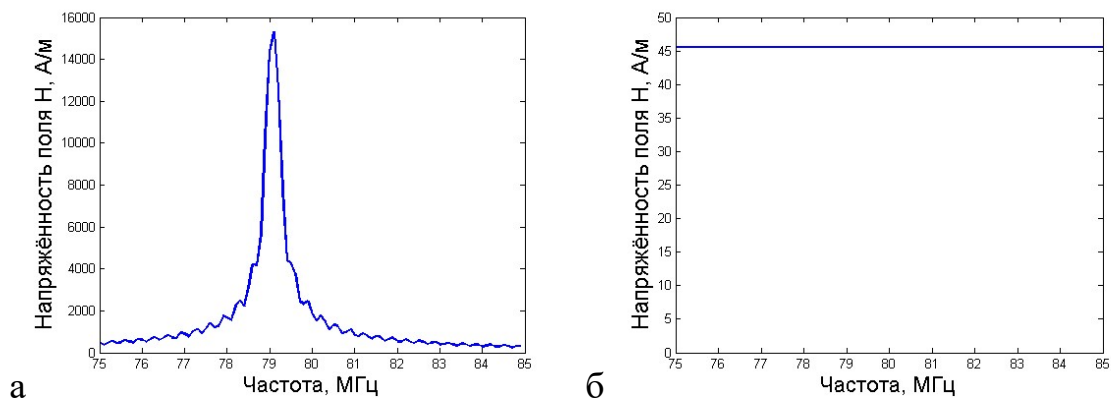
Рисунок 2.2.2 – Принцип работы схемы «крест». Компоненты электрического и магнитного полей вычисляются в разные моменты времени со сдвигом на $\Delta t/2$.

Создавая кольцо необходимой геометрии, получим резонатор с резонансной частотой в несколько десятков ГГц. Для того, чтобы сместить резонансную частоту в мегагерцовый диапазон, в щели резонатора создаём дополнительный конденсатор.

Теперь пришло время задать способ возбуждения системы. Программный пакет CST предлагает три варианта возбуждения: источник тока, источник напряжения и плоская волна. В предыдущих работах [19,20], выполненных на базе данного программного обеспечения, использовался источник тока, установленный параллельно конденсатору в щели резонатора.

Такой подход позволял получить характерный резонансный отклик, по которому и вычислялись резонансная частота и добротность резонатора. Однако, был упущен из виду тот факт, что значения напряжённости магнитного поля вблизи резонатора получались несоразмерно большими, по отношению к возбуждающему току. При внимательном изучении эквивалентной радиотехнической схемы для резонатора, несложно заметить, что ток, протекающий через кольцо, вовсе не равен току, указанному в источнике. Отсюда возникает необходимость подобрать новый способ возбуждения кольца.

Были реализованы четыре различных конфигурации с использованием источника тока и источника напряжения. Из четырёх вариантов лишь последовательное подключение источника напряжения и конденсатора в щели резонатора привело к возникновению резонансного отклика ожидаемой амплитуды (Рис 2.2.3.). Однако, с целью приблизить условия моделирования к условиям экспериментального исследования резонаторов, был также рассмотрен и вариант возбуждения плоской волной с заданием вектора нормали и амплитуды напряжённости электрической составляющей. Как оказалось, именно этот способ возбуждения является наиболее удобным, и именно он был использован во всех дальнейших численных экспериментах.



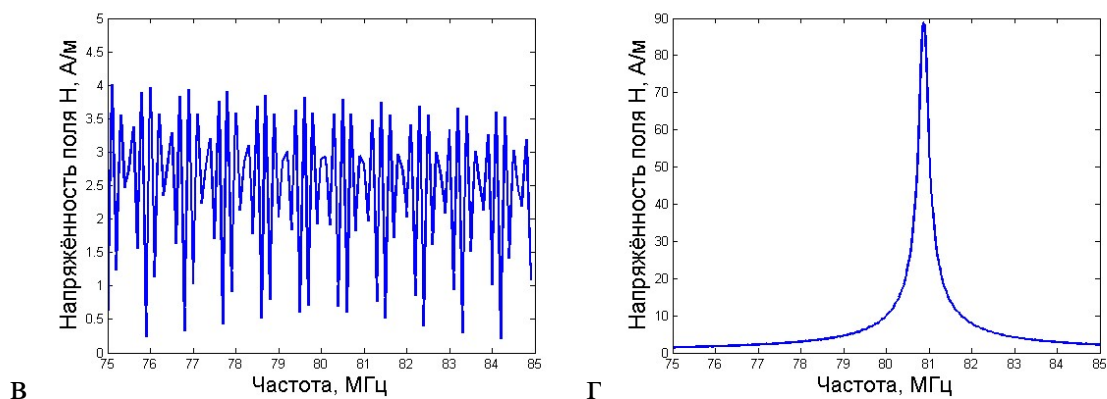


Рисунок 2.2.3 – Типичные зависимости напряжённости магнитного поля над центром кольцевого резонатора от частоты при разных типах возбуждения: параллельно подключенный источник тока (а), последовательно подключенный источник тока (б), параллельно подключенный источник напряжения (в), последовательно подключенный источник напряжения (г).

При изучении свойств резонатора нас интересует его отклик в широком диапазоне частот. Для этого форма возбуждающего импульса подбирается таким образом, чтобы в данном возбуждении присутствовали все интересующие нас частоты. Этому условию отлично удовлетворяет возбуждение типа «импульс» длиной порядка 70 нс, установленное в CST по умолчанию, но в то же время пользователь может ограничить число входящих гармоник при необходимости. После расчёта возбуждения система переходит в режим затухающих осцилляций и набора информации о релаксации резонатора во времени. Для получения частотных зависимостей (Рис 2.2.3), временной сигнал впоследствии подвергается преобразованию Фурье. При этом, полученные частотные зависимости тем точнее, чем дольше собиралась информация о релаксации резонатора. Это можно наблюдать, если сравнить зависимости (а) и (г) на Рис. 2.2.3, где помимо различия в численных значениях также явно наблюдается различие в «гладкости» графиков. Для получения более гладкого графика потребовалось моделирование релаксации системы вплоть до 7000 нс, в то время как грубая зависимость была получена при моделировании до 3500 нс. Этот факт

демонстрирует один из нескольких недостатков алгоритмов, основанных на численном решении уравнений Максвелла: для получения гладких частотных зависимостей необходимо потратить неоправданно большое количество времени на сбор статистики о релаксации системы.

Другим важным недостатком является сильное влияние размеров ячеек решётки в разбиении на получаемые частотные зависимости. Этот факт также наблюдается на зависимостях (а) и (г) на Рис. 2.2.3 и выражается в смещении резонансной частоты. Но для лучшей демонстрации данного недостатка была проведена отдельная серия вычислений (Рис. 2.2.4).

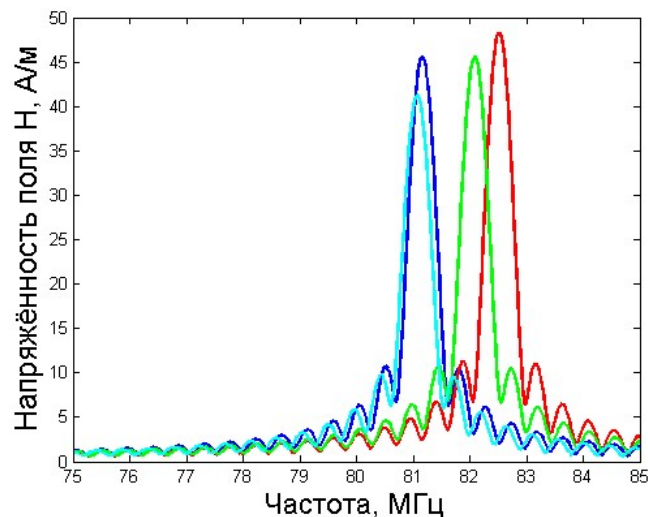


Рисунок 2.2.3 – Зависимости напряжённости магнитного поля вблизи резонатора от частоты для решёток с различным количеством ячеек на среднюю длину волны: синий – 30, красный – 40, зелёный – 50, голубой – 60.

Данная серия вычислений отчётливо демонстрирует наличие флуктуаций резонансной частоты в зависимости от размера ячеек сетки при том, что каждая из зависимостей была получена в результате преобразования временных сигналов одинаковой длины. Можно предположить [23], что решение будет сходиться к истинному при увеличении точности разбиения и, соответственно, уменьшении размеров ячеек решётки. Но в данном наборе графиков наблюдается неоднозначная зависимость смещения резонансной

частоты от количества ячеек на длину волны. Такое поведение резонансной частоты сохраняется и при дальнейшем увеличении точности разбиения. Для исследования сходимости решения данная серия вычислений была продолжена вплоть до разбиения на 100 ячеек на длину волны, при котором вычисления занимали более 40 часов, но сходимость так и не была обнаружена. Таким образом наличие сходимости решения при учащении сетки остаётся вопросом для дальнейших исследований с использованием больших вычислительных мощностей.

Таким образом, в результате нашего исследования было установлено, что фундаментальные подходы к решению задач электродинамики обладают рядом недостатков. В дополнение к ним идет тот факт, что рассчитать структуру, состоящую из более чем двух резонаторов, с высокой точностью, не обладая огромными вычислительными мощностями невозможно. Единственное решение для расчёта подобных структур, реализованное в пакете CST – это моделирование бесконечного периодического массива резонаторов по заданному дизайну одной ячейки. Однако, как отмечалось в Главе 1, свойства бесконечного массива резонаторов сильно отличаются от массивов конечных размеров, поэтому для решения нашей задачи подобный подход совершенно не подходит. Отсюда можно сделать вывод, что результаты, полученные из фундаментальных подходов в нашей работе правильнее всего будет использовать в качестве подтверждения других моделей в силу того, что надёжность подобных подходов доказана временем.

2.2.3. Расчет магнитного поля метаатома заданной конфигурации в пакете MATLAB

Для решения проблем, возникающих при использовании фундаментальных методов решения задач электродинамики применимо к нашей задаче, необходимо разработать новый математический и программный аппарат, который позволит моделировать распределение

магнитного поля вблизи резонатора с достаточно высокой скоростью и точностью. Это позволит не только получить значения локальной магнитной проницаемости $\mu_{лок}$, но и расширит такой подход для моделирования метаповерхностей, состоящих из подобных резонаторов, и нахождения распределения локальной магнитной проницаемости этих метаповерхностей в пространстве.

В ходе проделанной работы необходимый аппарат был разработан. Центральным фактом, на котором базируется правомерность используемого подхода является то, что при прохождении через проводник переменного тока, он вытесняется из объёма проводника на его поверхность – что известно как скин-эффект. Более того, толщина поверхностного слоя, в котором будет течь ток частоты 10 МГц составляет всего 0.02 мм или 1/50 от толщины резонатора. Также легко показать (например, используя CST), что в МГц диапазоне ток распределён по поверхности резонатора равномерно, и его распределение не меняется со временем. Таким образом, можно заменить объёмный резонатор с током, на равномерное пространственное распределение токов, совпадающее с поверхностью резонатора. Учтём то, что ток в резонаторе мы знаем из формулы (8). Теперь, для получения пространственного распределения напряжённости магнитного поля вблизи резонатора с током, нам достаточно рассчитать напряжённость магнитного поля, создаваемую пространственным распределением токов. Для этого воспользуемся законом Био-Савара-Лапласа в форме:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \text{rot}_{\vec{r}} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad (28)$$

где \vec{r}' и dV' - радиус-вектор и элемент объёма элементарного тока в пространстве, \vec{r} – радиус-вектор точки пространства, в которой вычисляется поле, V – объём распределения токов.

В силу симметрии для решения нашей задачи необходима лишь одна компонента вектора напряжённости магнитного поля, направленная перпендикулярно плоскости резонатора H_z :

$$H_z(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_V \frac{j_y(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' - \frac{\partial}{\partial y} \int_V \frac{j_x(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right), \quad (29)$$

где $j_x(\vec{r}')$ и $j_y(\vec{r}')$ - проекции вектора плотности тока на координатные оси, введённые по аналогии с рисунком 1.1.4.

Заменяя производные по координатам простейшими разностными формулами, получаем готовую формулу для вычисления напряжённости магнитного поля в любой точке дискретного пространства:

$$H_z(x_n, y_n, z_n) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{I_y^{x_{n+1}y_n} - I_y^{x_{n-1}y_n}}{2\Delta x} - \frac{I_x^{x_n y_{n+1}} - I_x^{x_n y_{n-1}}}{2\Delta y} \right), \quad (30)$$

где $I_{y,x} = \int_V \frac{j_{y,x}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$.

Вычислив численно интегралы типа $I_x^{x_n y_n}$ и $I_y^{x_n y_n}$ для каждой точки дискретного пространства и применив формулу (30) получим распределение напряжённости магнитного поля вблизи резонатора. Сравнение результатов, полученных с использованием данного алгоритма, и результатов, полученных в программном пакете CST, будет проведено подробно в Главе 3.

Отметим, что для вычисления локальной магнитной проницаемости по полученным данным в любой точке, вблизи резонатора, можно воспользоваться простой формулой:

$$\mu_{\text{лок}} \equiv \mu_{zz} = \frac{B_z}{\mu_0 H_0} = \frac{\mu_0 H_z}{\mu_0 H_0} = \frac{H_z}{H_0}, \quad (31)$$

где принимается во внимание тот факт, что из всего тензора магнитной проницаемости нас интересует только один его компонент.

В то же время, для сравнения результатов работы данного алгоритма с экспериментальными данными, нам необходимо сперва усреднить значение H_z во области, совпадающей с измерительной антенной, описанной в работе [15].

Наконец, осталось расширить изложенный выше алгоритм для вычисления локальной магнитной проницаемости метаповерхности, состоящей из исследуемых резонаторов. Учитывая равномерность и постоянство во времени конфигурации распределения электрического тока в резонаторе, можно утверждать, что напряжённость магнитного поля в каждой точке пространства вблизи резонатора линейно зависит от силы тока, текущего в нём. Опираясь на этот факт, рассчитаем распределение напряжённости магнитного поля H_z вблизи резонатора с током равным 1 А и назовём его единичным распределением H_{z1} . Теперь, для получения распределения H_{zm} вблизи резонатора с током I_n , необходимо просто умножить величину H_{z1} , рассчитанную в каждой точке пространства, на величину I_n . Для того, чтобы получить распределение H_z вблизи двух резонаторов с токами I_n и I_m используем принцип суперпозиции электромагнитных полей: в каждой точке пространства сложим вклады H_{zn} и H_{zm} от первого и второго резонатора соответственно. Имея значения токов во всех метаатомах метаповерхности из формулы (8), можем применить описанный выше приём для каждой точки пространства вблизи

метаповерхности, суммируя вклады в H_z от каждого из ближайших резонаторов. С целью сохранения логичности модели, в данном исследовании учитывался вклад соседей до третьего порядка включительно, как при вычислении распределения токов в метаатомах метаповерхности, так и при вычислении H_z вблизи метаповерхности (Рис 2.2.4).

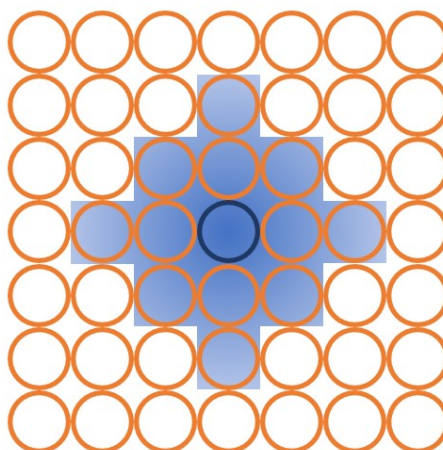


Рисунок 2.2.4 – Область влияния центрального метаатома в метаповерхности размером 7×7 элементов на величину H_z при учёте взаимодействия соседей до третьего порядка включительно.

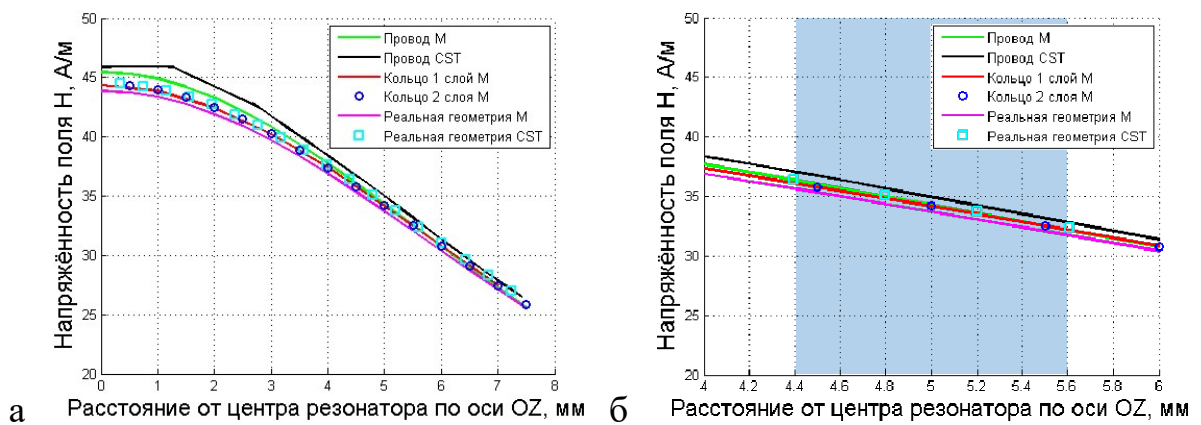


Рисунок 3.1.1 – Зависимость величины H_z вдоль оси Oz от расстояния до центра резонатора (а) и та же зависимость в увеличенном масштабе вблизи

области экспериментальных измерений (б).

ГЛАВА 3. РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. Поле в центре метаатома в различных моделях в зависимости от расстояния

В предыдущей главе было рассмотрено четыре различных модели для расчёта пространственного распределения напряжённости магнитного поля H_z и локальной магнитной проницаемости $\mu_{лок}$ вблизи резонатора. Использовать все модели одновременно нерационально, поэтому сравним их по самому простому критерию и выберем наиболее подходящую для дальнейших вычислений. Таким критерием может быть величина H_z вдоль оси Oz, проходящей через центр резонатора и направленной перпендикулярно его плоскости (Рис. 3.1.1).

На Рис. 3.1.1 (а) представлены результаты расчётов для всех четырёх моделей в пакете MATLAB (обозначены символом М) и для двух моделей (самой простой и самой сложной) в CST. Первое, что бросается в глаза, это то, насколько близко все зависимости лежат друг к другу. Особенно это заметно в области экспериментальных измерений (~2-3 мм от края резонатора, т.е. ~4.5-5.5 мм от его центра), выделенной синим фоном на Рис. 3.1.1 (б).

Максимальное расхождение результатов на всём промежутке расстояний составляет всего 5%, а в области измерений расхождение не превышает 1.5%. Это означает, что для оценки величины вертикальной составляющей магнитного поля H_z вблизи резонатора можно использовать любую из предложенных моделей. Однако для выбора наиболее подходящей модели необходимо провести более тщательное сравнение.

Рассмотрим сначала результаты, полученные с помощью самой простой модели – модели абсолютно тонкого провода. Как уже отмечалось в Главе 2, с реализацией данной модели в пакете CST возникают определённые трудности. Именно с этим фактом можно связать наибольшее отклонение результатов для данной модели, рассчитанных в CST, от всех остальных. Отметим тот факт, что обе зависимости H_z для данной модели лежат выше всех остальных. Отсюда можно сделать вывод, что упрощение модели приводит к некоторому завышению результатов вычислений.

Также вызывают большой интерес серии результатов для моделей колец с одним и двумя слоями, рассчитанные в пакете MATLAB и серия для модели реального резонатора, посчитанная в CST. Отличительной чертой этих серий является близость их результатов. На всём диапазоне расстояний от резонатора расхождение этих серий не превышает 0,5%. Так как эти серии получены из разных источников и лежат близко друг к другу, будем выбирать наиболее подходящую модель именно из этого набора серий.

Осталось отметить последнюю серию – модель реального резонатора, посчитанная в MATLAB. Эта серия лежит ниже всех остальных. Таким образом, усложнение модели не привело к уточнению результатов, а наоборот вызвало некоторое расхождение. Тем не менее, данная модель единственная учитывает асимметрию резонатора, поэтому она не будет отброшена, даже несмотря на её недостатки.

Прежде чем подвести итоги сравнения моделей на основе зависимостей H_z вдоль оси резонатора взглянем на таблицу 3.1.1. Невозможно не заметить разницу во времени вычислений для различных программных пакетов и, соответственно, различных математических подходов. Как уже отмечалось ранее, первопричинные расчёты требуют колоссальных затрат по времени по сравнению с расчётами для конкретных задач, реализованных на основании определённых допущений. Тем не менее, такие расчёты помогают выявить

некорректные допущения и являются достаточно надёжной проверкой для других вычислительных аппаратов.

Таблица 3.1.1. Сравнение времени, затрачиваемого на расчёт различных моделей

Модель	Время расчёта
Провод MATLAB	5 с
Провод CST	5.5 ч
Кольцо 1 слой MATLAB	7 с
Кольцо 2 слоя MATLAB	14 с
Реальная геометрия MATLAB	22 с
Реальная геометрия CST	18 ч

Учитывая всё изложенное выше, можно смело отдать предпочтение модели однослойного бесконечно тонкого кольца конечной высоты. Результаты расчёта по данной модели крайне близки к результатам нескольких других моделей, в то же время, эта модель не сильно проигрывает в быстродействии самой простой модели бесконечно тонкого провода (~20%), сильно выигрывает у самой медленной модели (~200%) и практически не отличается от своего усложнённого аналога по результатам.

3.2. Пространственное распределение магнитного поля в центральной плоскости и над поверхностью метаатома

Для подтверждения оправданности нашего выбора модели расчёта H_z и $\mu_{лок}$ рассмотрим теперь распределение H_z в центральной плоскости метаатома и над его поверхностью (Рис. 3.2.1).

Из рисунка видно, что при использовании различных моделей и различных подходов для расчёта магнитных полей вблизи резонатора,

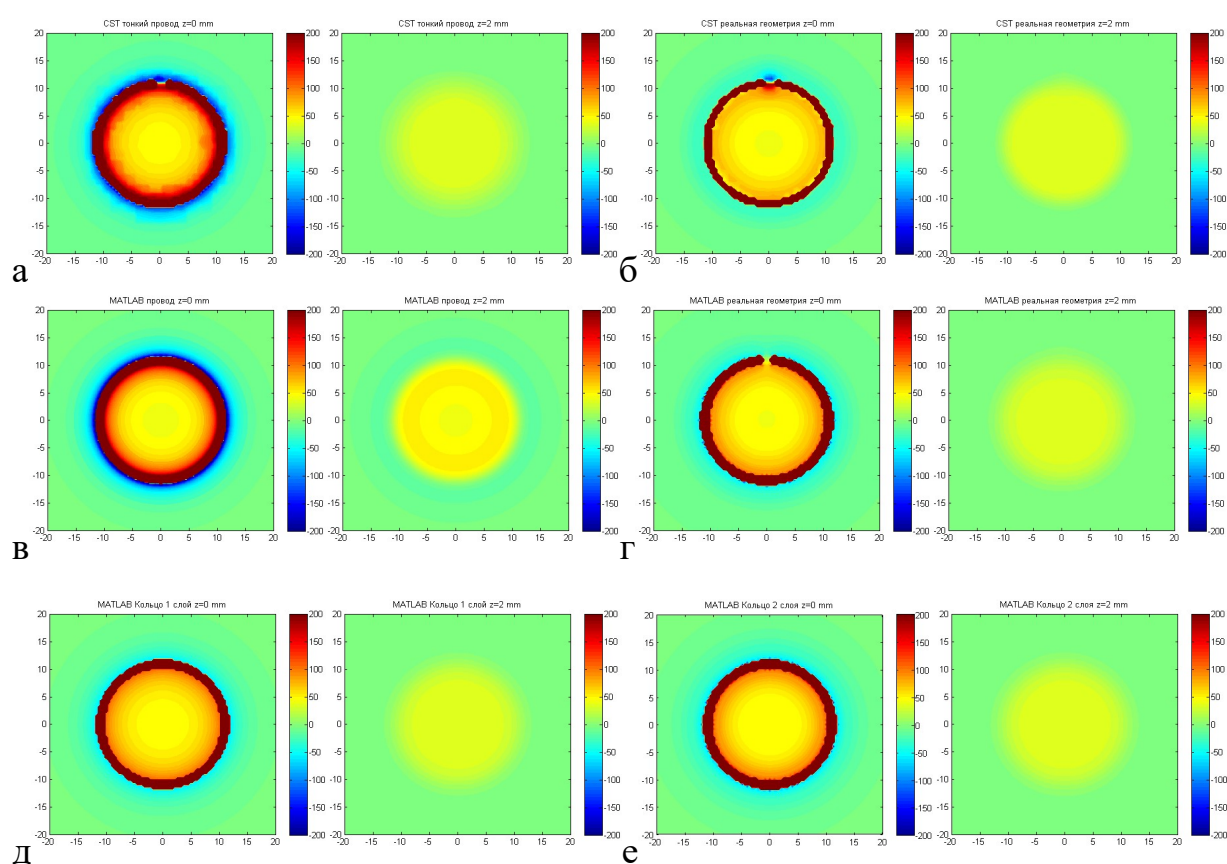


Рисунок 3.2.1 – Пространственное распределение напряжённости магнитного поля H_z в центральной плоскости метаатома с током 1 А и в двух миллиметрах над его поверхностью для различных моделей: тонкий провод в CST (а), реальная геометрия в CST (б), тонкий провод в MATLAB (в), реальная геометрия в MATLAB (г), однослойное кольцо MATLAB (д), двухслойное кольцо MATLAB (е).

распределения напряжённости магнитного поля H_z в плоскости XOY получаются весьма близкими друг к другу. Это в очередной раз доказывает, что допущения, положенные в основу расчёта в пакете MATLAB, были правомерными. Также это означает, что каждая из предложенных моделей может быть использована на практике при допущении соответственной погрешности.

Сравнивая распределения (а) и (в) на рисунке 3.2.1 со всеми остальными на этом же рисунке, можно заметить, что модель тонкого провода даёт наибольшее расхождение результатов, даже на некотором расстоянии от резонатора. Подобные расхождения нежелательны в нашем исследовании, поэтому обратим внимание на следующую по скорости работы модель – однослойное кольцо. Эта модель даёт распределения, практически неотличимые от двух оставшихся моделей, обгоняя их в быстродействии. Таким образом, мы ещё раз убеждаемся в правильности выбора финального метода для расчёта H_z и $\mu_{лок}$.

3.3. Учет размеров измеряющей антенны

Конечной целью данного исследования является сравнение результатов численного моделирования и результатов экспериментального измерения локальной магнитной проницаемости отдельных резонаторов и метаповерхностей. Для этого необходимо учесть, каким именно способом были получены экспериментальные данные, и рассмотреть влияние этого способа измерения на получаемые результаты.

В работе [15] указано, что данные были получены с помощью измерительной антенны в виде петли радиусом 5 мм. Сигнал, передаваемый антенной, пропорционален магнитному потоку, проходящему через неё. Так как площадь антенны постоянна, магнитный поток через неё пропорционален средней напряжённости магнитного поля внутри антенны. Это означает, что

в ходе измерений H_z и $\mu_{лок}$ с помощью данной антенны, их значения

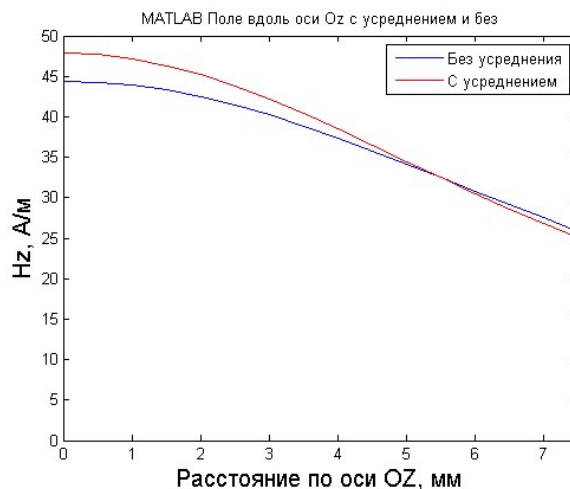


Рисунок 3.3.1 – зависимости величины H_z вдоль оси Oz от расстояния от центра резонатора, с использованием усреднения и без.

усредняются по её площади. Чтобы сравнение результатов моделирования и эксперимента было корректным, необходимо также провести усреднение рассчитанных численно параметров.

На рисунке 3.3.1 показаны зависимости H_z вдоль оси Oz, с использованием усреднения и без. По горизонтальной оси отложено расстояние от серединной плоскости резонатора. Сравнивая эти зависимости, можно отметить, что высота расположения антенны в работе [15] была выбрана крайне удачно, так как на этой высоте влияние усреднения минимально и не превышает 2%. Таким образом, в первом приближении при сравнении результатов можно было бы игнорировать влияние усреднения, но, учитывая резонансный характер откликов метаатомов мы будем его учитывать для повышения точности результатов моделирования.

Также, для будущих исследований может представлять интерес влияние размера антенны на получаемые данные. Этот вопрос также был

изучен, и результаты представлены на рисунке 3.3.2. Из рисунка видно, что при измерении на высоте 2 миллиметра над краем резонатора показания антенн с радиусами в пределах 0-9 мм будут различаться менее чем на 1%. Однако при измерении полей внутри резонатора антенна с радиусом в 5 мм

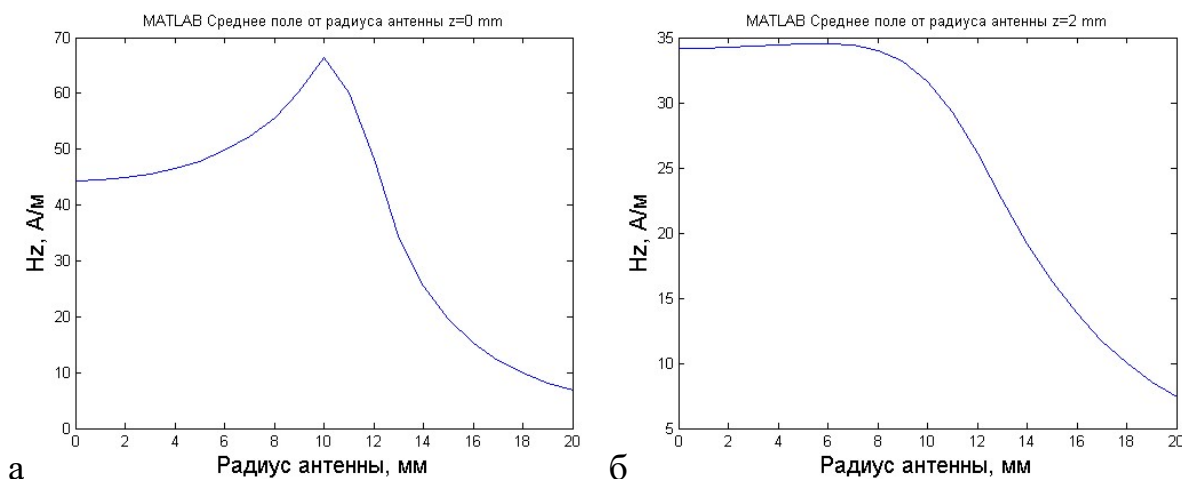


Рисунок 3.3.2 – Зависимость величины поля, усреднённого по площади антенны в срединной плоскости резонатора (а) и в двух миллиметрах над его поверхностью.

уже даёт

отличие от значения поля в центре кольца в 5%. Поэтому для подобного рода измерений следует выбирать антенны меньшего радиуса с целью уменьшить влияние усреднения на экспериментальные результаты.

3.4. Сравнение результатов численного моделирования локальной проницаемости и результатов эксперимента

Теперь, когда мы выбрали оптимальную модель для расчёта локальной магнитной проницаемости метаатома и метаповерхности, а также учли влияние антенны при измерениях, у нас можно корректно сравнивать результаты численного моделирования и эксперимента.

Первым делом сравним частотные зависимости магнитной проницаемости для уединённого резонатора (Рис. 3.4.1). На графиках

наблюдается чёткий резонансный отклик, характерный для метаатомов такого типа, причём экспериментальные точки отлично ложатся на рассчитанную кривую. Совпадение результатов моделирования и эксперимента в очередной раз подтверждает разумность и правомерность предположений, на которых строилась теория для расчёта магнитной проницаемости. Также можно отметить, что добротность и сопротивление,

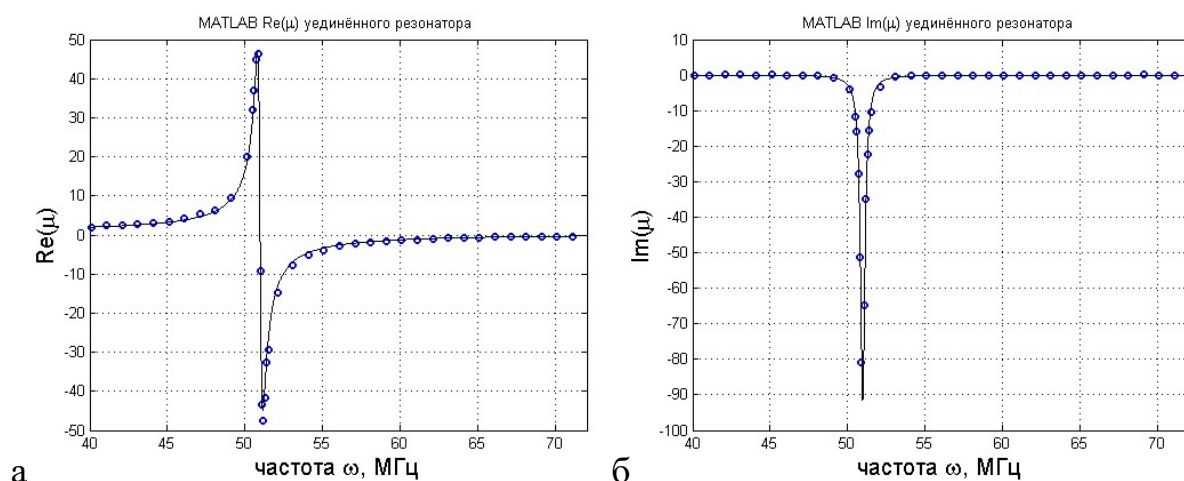


Рисунок 3.4.1 – Графики зависимости действительной (а) и мнимой (б) компоненты магнитной проницаемости уединённого резонатора от частоты. Сплошной линией отмечены результаты моделирования, круглыми маркерами – результаты эксперимента.

вычисленные исключительно из

формы резонансного отклика, близки к действительным.

Теперь перейдём к рассмотрению отклика резонатора в окружении себе подобных (Рис 3.4.1). Такой отклик кардинальным образом отличается от отклика, рассмотренного ранее. Изменения происходят за счёт взаимодействия между метаатомами метаповерхности. Данное взаимодействие приводит к распространению магнитоиндуктивных волн в структуре [11,12]. Это в свою очередь приводит к уширению полосы пропускания и к усложнению характера отклика метаматериала.

На рисунке 3.4.1 изображены компоненты $\mu_{лок}$ центрального элемента метаповерхности размером 7×7 при возбуждении однородным полем. Достаточно большую долю графиков составляют области с хорошим совпадением результатов моделирования и эксперимента. Также стоит отметить, что результаты моделирования теперь совпадают по порядку величины и характеру изменения на всём интервале частот. Однако в то же время наблюдаются области заметного несовпадения расчётов и эксперимента. Можно выделить две такие области: вблизи частоты 50 МГц и вблизи частоты 62 МГц.

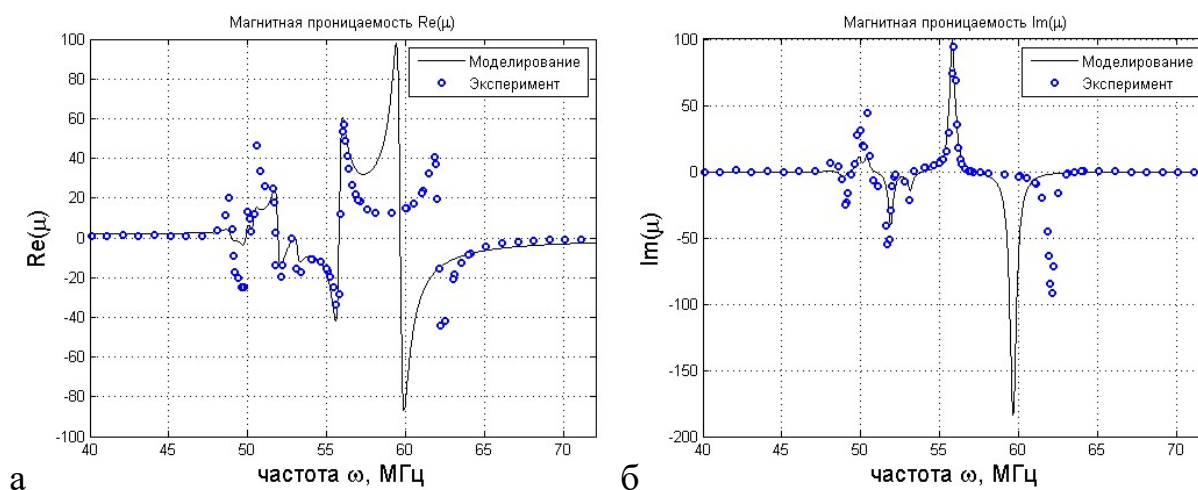


Рисунок 3.4.2 – Графики зависимости действительной (а) и мнимой (б) компоненты $\mu_{лок}$ центрального элемента метаповерхности размером 7×7 при возбуждении однородным полем.

Учитывая отличное совпадение результатов моделирования и эксперимента для уединённого метаатома, можно предположить, что расхождение результатов для центрального элемента метаповерхности может быть обусловлено двумя факторами: проблемами при проведении эксперимента и неточностями при учёте взаимодействия.

В работе [15] подробно описывался тот факт, что вблизи частоты 50 МГц возникали проблемы с антенной, реализующей однородное возбуждение. Вблизи этой частоты для возбуждающей антенны резко падало отношение сигнал/шум. Для улучшения данной ситуации были применены численные методы фильтрации сигнала, но, по-видимому, решить проблему полностью таким методом не удалось. Отсюда и возникает расхождение результатов в первой области.

Характер расхождения результатов во второй области сильно отличается от первой, из чего можно сделать вывод, что и причина проблемы другая. Здесь налицо ошибка в расчёте позиции второго пика поглощения. За положение этих пиков ответственно ни что иное, как взаимодействие метаатомов. Вспомним, что в данном исследовании учитывалось взаимодействие соседей только до третьего порядка включительно. Отсюда можно сделать вывод, что в дальнейших исследованиях, во избежание подобных несовпадений, необходимо учесть взаимодействие большего числа соседей, вплоть до самых удалённых.

Теперь рассмотрим распределение локальной магнитной проницаемости над всей метаповерхностью размерами 7×7 метаатомов (Рис. 3.4.3). Благодаря особенностям использованных методов расчёта удаётся детально восстановить распределение различных компонент $\mu_{лок}$ над метаповерхностью, вплоть до отчётливо различаемых контуров метаатомов. Также можно заметить, что учёт влияния антенны сглаживает пики

распределения, таким образом усредняя пространственное распределение $\mu_{лок}$. Далее сравним результаты моделирования и эксперимента (Рис. 3.4.4).

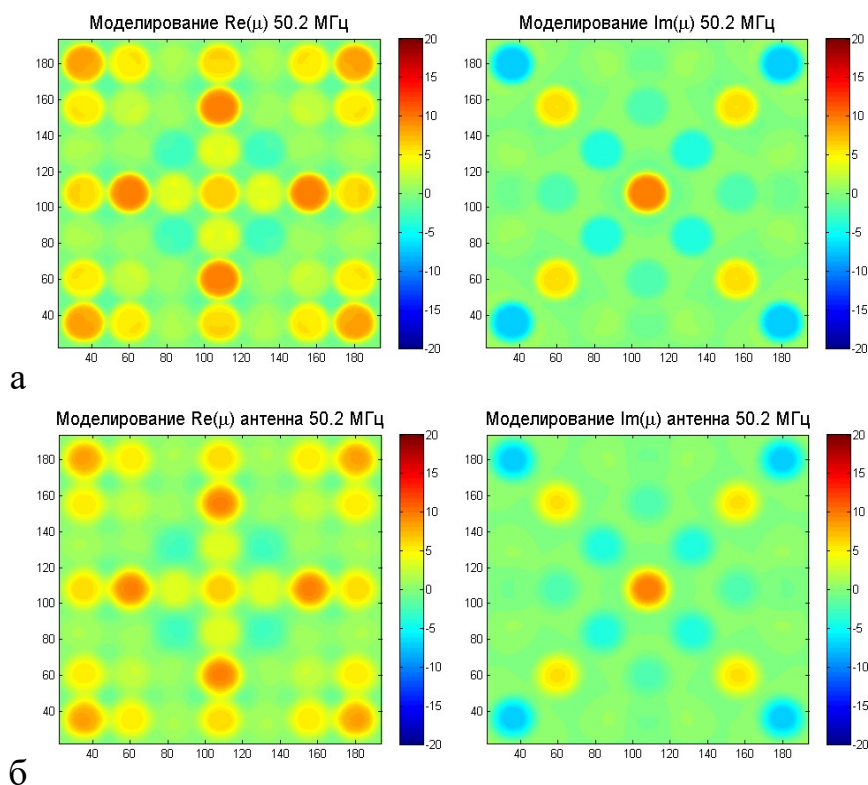
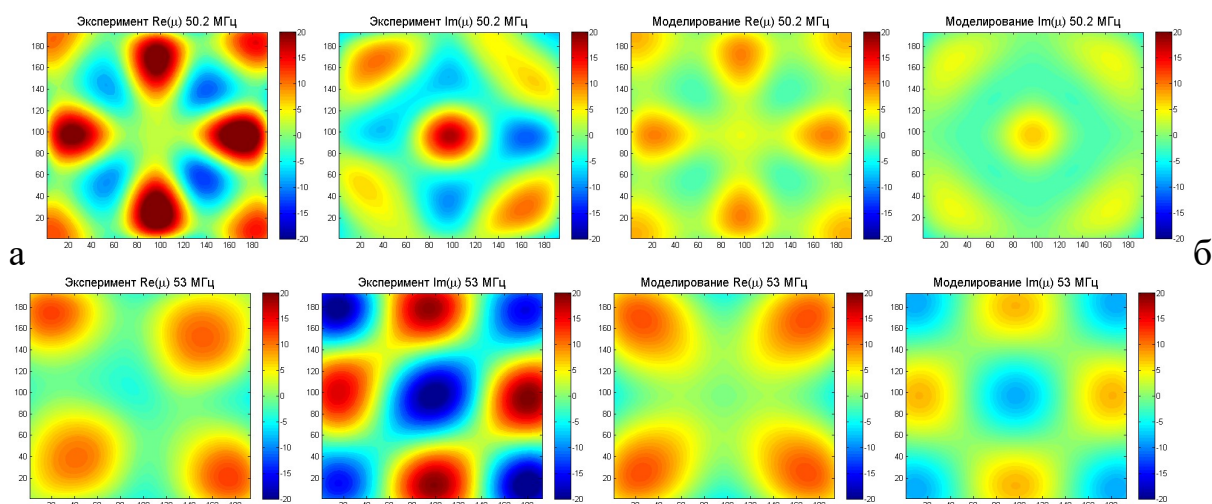


Рисунок 3.4.3 – Графики зависимости действительной и мнимой компоненты $\mu_{лок}$ метаповерхности размером 7×7 без учёта влияния антенны (а) и с его учётом (б).



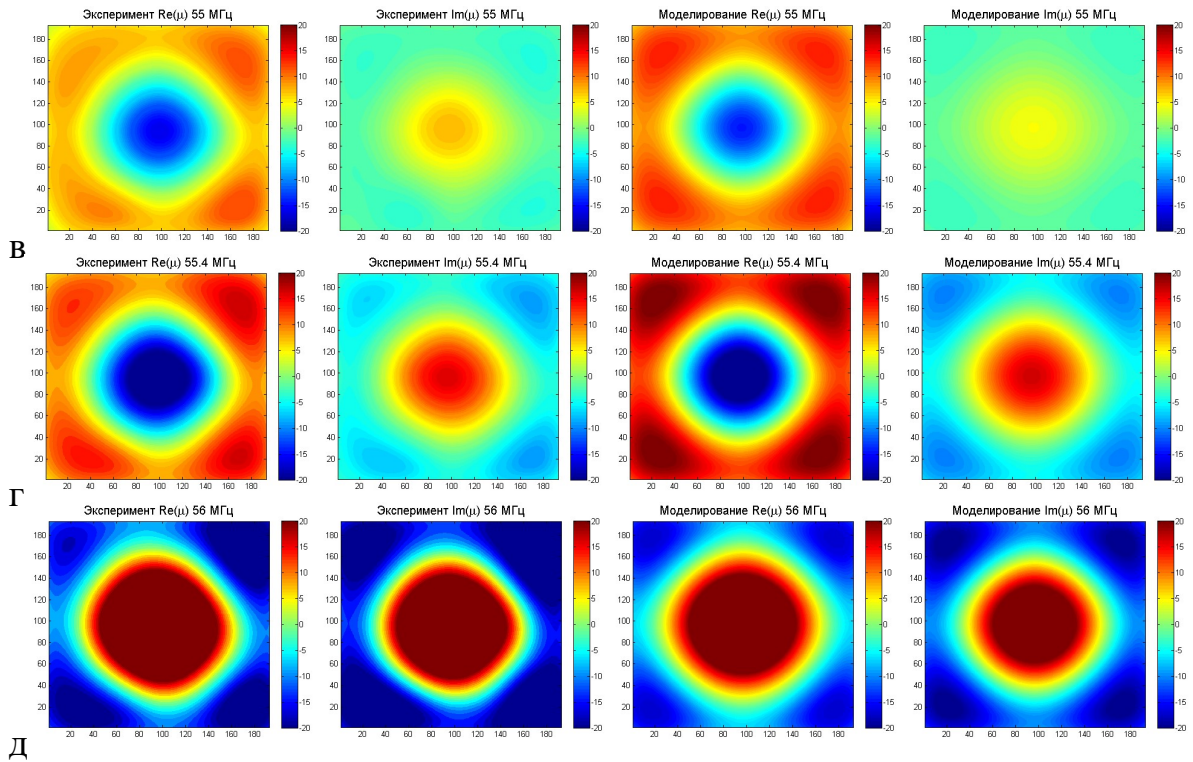


Рисунок 3.4.4 – Локальная магнитная проницаемость при возбуждении метаповерхности 7×7 метаатомов однородным полем. Слева направо: экспериментальные значения реальной части $Re(\mu_{лок})$ и мнимой части $Im(\mu_{лок})$ на высоте 3 мм над поверхностью, результаты моделирования $Re(\mu_{лок})$ и $Im(\mu_{лок})$ в центрах метаатомов; значения частот 50.2 МГц (а), 53 МГц (б), 55 МГц (в), 55.4 МГц (г), 56 МГц (д). Данные эксперимента взяты из работы [15]

Полученная первоначально детализация распределения (Рис. 3.4.3) сильно превосходила детализацию экспериментальных данных. Поэтому, для удобства сравнения результатов, на рисунке 3.4.3 были визуализированы данные только для случаев расположения антенны прямо над центрами каждого из метаатомов.

Полученные распределения снова близки не только по форме, но и по порядку величины. Результат такой точности для моделирования

распределения $\mu_{лок}$ получен впервые. Несмотря на то, что остаются некоторые расхождения в результатах, эти расхождения порождаются несовершенствами эксперимента, интерпретации его результатов и учётом влияния недостаточного количества соседних метаатомов.

Таким образом, разработанная модель, для расчёта пространственных распределений напряжённости магнитного поля H_z и локальной магнитной проницаемости $\mu_{лок}$ вблизи метаповерхности выполняет свою роль с большим успехом и может быть активно использована в дальнейшем. Результаты, полученные с использованием данного подхода, должны будут обладать достаточно высоким уровнем достоверности, особенно если будут разрешены перечисленные выше проблемы.

ВЫВОДЫ

В работе впервые решена такая актуальная задача, как разработка программного аппарата для расчёта локальной магнитной проницаемости метаматериалов в виде метаповерхностей из расщеплённых кольцевых резонаторов, учитывающая конечные размеры метаатомов.

В процессе выполнения работы были получены следующие результаты:

- ✓ В соответствии с предложенной моделью разработана оригинальная программа в пакете MATLAB для расчёта распределения напряжённости магнитного поля и магнитной проницаемости вблизи уединённого метаатома и метаповерхности из взаимодействующих метаатомов. В программе предусмотрена возможность варьировать коэффициент взаимодействия метаатомов, частоту и характер возмущения метаматериала.
- ✓ Исследованы принципы работы программного пакета CST для расчёта электромагнитных полей, основанного на «первопринципных» методах. Обнаружены и описаны особенности работы в данном пакете и указана роль подобного рода пакетов в предсказании характеристик магнитных метаповерхностей.
- ✓ Был проведён подробный анализ влияния подробности модели распределения токов в пространстве на скорость вычисления и на результаты расчётов. На основании анализа была подобрана оптимальная модель для расчёта в виде бесконечно тонкого цилиндра конечной высоты.
- ✓ Для подобранной модели доказана достоверность получаемых результатов путём сравнения с методом расчёта магнитной проницаемости на основе численных расчётов из первых принципов.

- ✓ Изучено и учтено влияние усреднения по площади измерительной антенны на получаемые результаты. Показано, что при расстоянии 5 мм от метаповерхности влияние антенны минимально.
- ✓ Проведён сравнительный анализ полученных результатов и результатов эксперимента.

В результате исследования было установлено, что разработанная модель даёт результаты близкие к экспериментальным данным не только по форме, но и по абсолютным значениям на значительном диапазоне частот. При этом порядок значений магнитной проницаемости вблизи метаповерхности, полученный по разработанной модели, совпадал с порядком значений проницаемости, полученных экспериментально, на всём рассматриваемом диапазоне частот.

Также были описаны причины некоторого расхождения результатов моделирования и эксперимента на определённых диапазонах частот и были предложены меры дальнейшего усовершенствования расчета. Было установлено, что указанные причины не являются недостатками самой модели, а скорее неточностями эксперимента и вспомогательных методов, нуждающихся в доработке. Таким образом было продемонстрировано, что разработанная модель отлично выполняет свою функцию и не нуждается в какого-либо рода исправлениях и дополнениях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе проделанной работы были не только достигнуты поставленные цели и выполнены поставленные задачи, но также были предложены пути улучшения существующих теоретических методов и экспериментальных подходов для расчёта магнитной проницаемости.

Полученные данные позволяют расширить область применимости магнитных метаповерхностей, включив полосу пропускания МИ волн в рабочий диапазон частот. Это достигается за счёт установления характера и величины магнитного отклика метаповерхности в данном частотном диапазоне.

Проведённое исследование доказывает необходимость учёта конечных размеров метаатомов при расчёте свойств метаматериалов и открывает возможности для достаточно точного предсказания свойств магнитных метаповерхностей, состоящих из кольцевых резонаторов еще на стадии их проектирования для активного применения метаматериалов в науке и технике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Engheta N., Ziolkowski R. W. *Metamaterials: Physics and Engineering Explorations*. John Wiley & Sons & IEEE Press. 2006.
2. Веселаго В.Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ϵ и μ . УФН, т.92, с.512-517. 1968.
3. Smith D.R., Padilla W.J., Vier D.C., Nemat-Nasser S.C., Schultz S. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Phys.Rev.Lett.*, v.84, p.4184-4187. 2000.
4. Raghavan S., Rajeshkumar V. An Overview of Metamaterials n Biomedical Applications. *PIERS Proceedings, Taipei*. 2013.
5. Kiti G., Radoni V., Crnojevi V. Soil moisture sensors based on metamaterials. *SIST*. 2012.
6. Shamonina E., Solymar L. Superdirectivity by virtue of coupling between metaatoms. *IEEE Proc. 7th Int. Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics, Metamaterials*. p.97–99, Bordeaux, France. 2013.
7. Кирюшечкина С.В., Вакуленко А.Ю. Сверхнаправленное излучение метаатомов с магнитным взаимодействием в МГц. Сборник тезисов международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2017», Москва. 2017.
8. Stevens C.J. Magnetoinductive waves and wireless power transfer. *IEEE Trans. Power Electron*, v.30, p.6182-6190. 2014.
9. Pendry J.B., Holden A.S., Robbins D.J., Stewart W.J. Magnetism from conductors and enhanced non-linear phenomena. *IEEE. Trans. Microwave Theory Technol.* v.47, p.2075–2084. 1999.
10. Gorkunov M., Lapine M., Shamonina E., Ringhofer K.H. Effective magnetic properties of a composite material with circular conductive elements. *Eur.Phys.J.B*, v.28, p.263-269. 2002.

11. Shamonina E., Kalinin V.A., Ringhofer K.H., Solymar L. Magneto-inductive waveguide. *Electron.Lett.*, v.38, p.371-372. 2002.
12. Solymar L., Shamonina E. *Waves in Metamaterials*. Oxford Univ.Press, Oxford. 385 p. 2009.
13. Radkovskaya A., Petrov P., Kiriushchikina S, Satskiy A., Ivanyukovich M, Vakulenko A., Prudnikov V., K Kotelnikova O., Korolev A., Zakharov P. Magnetic metamaterials: coupling and permeability. *JMMM*, v.459, p.187-190. 2018.
14. Radkovskaya A., Petrov P., Kiriushchikina S, Satskiy A., Ivanyukovich M, Vakulenko A., Prudnikov V., K Kotelnikova O., Korolev A., Zakharov P. Magnetic metamaterials: coupling and permeability. *Book of abstracts Moscow International Symposium on Magnetism 2017, MISM-2017*, 1-5 July, Moscow, p.96, 2017.
15. Вакуленко А. Ю. Локальная магнитная проницаемость метаповерхностей. Магистерская диссертация. Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова. Москва. 88 с. 2018.
16. Shamonina E., Solymar L. Diamagnetic properties of metamaterials: a magnetostatic analogy. *Eur. Phys. J. B*, v.41, p.307-312. 2004.
17. Lapine M., Krylova A., Belov P., Poulton C., McPhedran R., Kivshar Y. Broadband diamagnetism in anisotropic metamaterials. *Phys.Rev. B*, v.87, p.024408- 1-7. 2013.
18. Вакуленко А.Ю. Экспериментальное исследование поверхностных магнитоиндуктивных волн в метаматериалах. Бакалаврская дипломная работа. Физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова. Москва. 58 стр. 2016.
19. Кирюшечкина С.В. Теоретическое, численное и экспериментальное исследование особенностей взаимодействия элементов магнитных метаматериалов в ГГц диапазоне. Бакалаврская работа. Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова. Москва. 46 с. 2016.

20. Петров П.С. Взаимодействие в плотноупакованных магнитных метаматериалах. Магистерская диссертация. Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова. Москва. 53 с. 2017.
21. Weiland T. A discretization method for the solution of Maxwell's equations for six-component fields: Electronics and Communication, (AEÜ), Vol. 31, pp. 116-120, 1977.
22. Weiland T. Time domain electromagnetic field computation with finite difference methods. International Journal of Numerical Modelling, Vol. 9, pp. 295-319, 1996.
23. Mozdzen T. Finite Length Horizontal Dipole over a Ground Plane Simulated Beam vs Analytical Beam Study, Part 1,2, Arizona State University, 2014.